Repetitionskurs i

elementär algebra, matematik

för DI1 och EI1 ht 2018

Chalmers Tekniska Högskola

Reimond Emanuelsson

Förord

Detta kompendium är tänkt som en repetition av elementär algebra från gymnasiets kurser. Bland annat behandlas uttryck, identitet, ekvationslösning, rationellt uttryck, olikhet och absolutbelopp.

Texten omfattar 118 exempel och cirka 500 uppgifter.

Lite om logik och Pythagoras sats (delavsnitt 1.4.7 och 1.4.8) är tillagt till detta års upplaga.

Dessutom finns lite grundläggande om Binomialteoremet (avsnitt 1.11).

I Appendix (sidan 87) finns potens- och logaritmlagarna formulerade.

Författaren hösten 2016

Repetitio est mater studiorum

Innehållsregister

Kapitel 1

Elementär algebra

1.1 Uttryck och likheter

EXEMPEL 1.1

- Ett matematiskt uttryck är ex.vis $2 \cdot 6$ eller 12. Det är klart att dessa två uttryck är lika. Detta skriver vi med likhetstecknet: $2 \cdot 6 = 12$. Nu är även $12 = 2 \cdot 6$. Det spelar alltså ingen roll i vilken ordning vi skriver detta. Man kan också skriva $2 \cdot 6 = 6 \cdot 2$.
- Med uttrycket $4 \cdot 3$ kan man också teckna likheten $12 = 4 \cdot 3$.
- Alltså kan man skriva $12 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 6$. Om man utgår från $2 \cdot 6 = 12$ och $12 = 4 \cdot 3$ erhåller man alltså även likheten $2 \cdot 6 = 4 \cdot 3$. Man säger att $2 \cdot 6 = 12$ och $12 = 4 \cdot 3$ medför att $2 \cdot 6 = 4 \cdot 3$.
- I likheten $2 \cdot 6 = 12$ kallas $2 \cdot 6$ vänster led och 12 kallas höger led avseende den ordning i vilken de skrivs.

■

EXEMPEL 1.2 $3x^2 + 4$ och $\sqrt{t}$ är *uttryck* emedan $3x^2 + 4 = \sqrt{t}$ är en *ekvation*. x och t kallas *variabler*.
Det är uppenbart att $3x = 2x + x$ för alla (tänkbara) x. En sådan likhet kallas oftast *identitet*.

■

Bokstäver betyder tal, reella (eller komplexa), och måste därför uppfylla samma räknelagar som tal. I ett *uttryck* som $\dfrac{1}{a} + 2x$, kan a och x vara vilka tal som helst, förutom att $a \neq 0$.
För att framställa ett samband mellan storheter använder man i allmänhet bokstäver.

Definition 1.1

- Ett (matematiskt) uttryck skrivs med tal (som kan representeras av bokstäver) och eventuellt med mellanliggande operationer $+, -, \cdot, \div$ m.fl. .
- En ekvation är en likhet (=) mellan två uttryck.
- En identitet är en likhet mellan två uttryck som gäller för alla (tänkbara) värden på de inblandade variablerna. En identitetslikhet kan skrivas med "≡".
- För en likhet $a = b$ kallas a för vänster led, förkortat VL, emedan b kallas höger led, förkortat HL avseende den ordning i vilken de står i. För likhetstecknet gäller att

$$a = a, \quad a = b \Longleftrightarrow b = a, \quad a = b \text{ och } b = c \Rightarrow a = c \tag{1.1}$$

  $\Rightarrow$ läses "medför" och kallas implikation, d.v.s. likheterna i vänster led medför likheten i högerledet.
  $\Leftarrow$ betyder att höger led medför vänster led.
  $\Leftrightarrow$ läses "ekvivalent med" och innebär dels $\Rightarrow$ och dels $\Leftarrow$.
  Egenskaperna i för likhetstecknet (1.1) kallas reflexivitet, symmetri respektive transitivitet.

- En (matematisk) ekvation är en likhet mellan två uttryck $P_1 = P_2$.

1.2 Enkla grundläggande regler

1.2.1 Associativa och kommutativa lagar

Exempel 1.3 Vi vet att för addition gäller att

$$2 + 5 = 5 + 2 \text{ och att } (2 + 5) + 6 = 2 + (5 + 6)$$

För multiplikation gäller att

$$2 \cdot 5 = 5 \cdot 2 \text{ och att } (2 \cdot 5) \cdot 6 = 2 \cdot (5 \cdot 6)$$

■

Ovanstående är exempel på följande reger/lagar.

$$a + b = b + a \qquad a + (b + c) = (a + b) + c \tag{1.2}$$

Dessa kallas *kommutativa* respektive *associativa* lagen för addition.
Motsvarande lagar finns för multiplikation.

$$a \cdot b = b \cdot a \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \tag{1.3}$$

Då en av faktorerna är en bokstav skrivs multiplikationsoperatorn "$\cdot$" i allmänhet inte ut. (1.3) kan alltså skrivas $ab = ba$ och $a(bc) = (ab)c$.
Att dessa lagar gäller går egentligen inte att bevisa, men kan bekräftas av erfarenheten.
De associativa och kommutativa lagarna säger att det saknar betydelse i vilken ordning operationerna genomförs. D.v.s. man kan utföra operationerna i önskvärd ordning. Därför sätts inte paranteserna i allmänhet inte ut.

1.2.2 Distributiva lagen

Det finns dessutom ett samband mellan addition och multiplikation där parantesen spelar en avgörande roll. Det är den viktiga *distributiva* lagen[1].

$$a(b + c) \quad = \quad ab + ac \tag{1.4}$$

Kommentarer Observera att en ekvation alltid kan läsas från höger till vänster! Vi tar inte upp potenslagarna, även om dessa används undermedvetet.

EXEMPEL 1.4 $12 \cdot 9 = 12 \cdot (10 - 1) = 12 \cdot 10 - 12 \cdot 1 = 120 - 12 = 108$

■

Här används motsvarande lag för minus:

$$a(b - c) = ab - ac$$

Man observerar att i VL av (1.4) förekommer talet a endast en gång emedan att i HL förekommer talet a två gånger, en i varje term. Man säger att a är *gemensam faktor* till/i de båda termerna.

[1] Detta är, liksom kommutativa och assiociativa lagarna, en identitet.

Prioriteringsregler

I den distributiva lagen (1.4) ser parantesen i $a(b+c)$ till att additionen går före multiplikationen. Utan parantes går multiplikation före addition.

EXEMPEL 1.5

$$a \cdot (2+5) = a \cdot 7 = 7a \text{ emedan } a \cdot 2 + 5 = 2a + 5.$$

$$a \cdot 2^5 = 32a \text{ emedan } (a \cdot 2)^5 = \{\text{potenslag}\} = a^5 \cdot 2^5 = 32a^5.$$

■

Prioriteringsordningarna är följande

- Multiplikation går före addition.
- Division går före addition.
- Potens går för multiplikation.
- Potens går för addition.

Enkel hantering av uttryck

EXEMPEL 1.6 Ett uttryck såsom $\frac{3}{2}$ kan skrivas om på ett flertal sätt.

$$\frac{3}{2} - 1 + 1 = \frac{3}{2} - \frac{2}{2} + 1 = \frac{3-2}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1$$

Alternativt kan en omskrivning göras så här:

$$\frac{3}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{1}{2} + 1$$

■

EXEMPEL 1.7 För att förenkla uttrycket $\frac{3}{1/2}$ kan man *förlänga* med faktorn 2:

$$\frac{3}{1/2} = \frac{3}{1/2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1/2 \cdot 2} = \frac{6}{1} = 6$$

■

Exempel 1.8 I uttrycket $\dfrac{6x}{10}$ kan man utföra den multiplikativa förkortningen

$$\frac{6x}{10} = \frac{3 \cdot 2 \cdot x}{5 \cdot 2} = \frac{3x}{5} \cdot \frac{2}{2} = \frac{3x}{5} \cdot 1 = \frac{3x}{5}$$

■

Exempel 1.9 I $5x + 10y$ är 5 gemensam faktor till de båda termerna. Man kan då *bryta ut/faktorisera* 5 med distributiva lagen (1.4):

$$5x + 10y = 5 \cdot x + 5 \cdot 2y = 5(x + 2y)$$

■

1.2.3 Minustecken

Följande regler gäller för minustecken: $-- = +$ och $-+ = +- = -$

Exempel 1.10 Produkten av två negativa tal blir ett positivt tal:
$-2 \cdot (-3) = +6 = 6$
Produkten av ett negativt och ett positivt tal blir ett negativt tal:
$-2 \cdot 3 = -6 = -6$

■

Exempel 1.11 Att sätta ett minustecken framför ett tal, uppfattas som att multiplicera talet med -1 Ex.vis är $-5 = (-1) \cdot 5$.
Man sätter alltså en parantes kring det tal som har minustecken.

■

1.2.4 Inverterat värde och bråk

Exempel 1.12 Det inverterade värdet till $-\frac{1}{2}$ är $\frac{1}{-\frac{1}{2}}$. Vi förlänger det senare uttrycket med -2:

$$\frac{1}{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-2}{-2} = \frac{-2}{1} = -2$$

Således är $\frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$. Det inverterade värdet till $1/3$ är 3. Detta kan man visa på liknande sätt som ovan:

$$\frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{1 \cdot 3}{\frac{1}{3} \cdot 3} = \frac{3}{1} = 3$$

På samma sätt kan man visa att det inverterade värdet till $3/4$ är $4/3$, ty:

$$\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{1 \cdot 4}{\frac{3}{4} \cdot 4} = \frac{4}{3}$$

■

Exempel 1.13 Ett minustecken framför ett bråk eller framför dess täljare respektive nämnare förändrar inte dess värde. Dock brukar minustecknet att placeras framför bråket som i $-\frac{2}{3}$.

$$-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}\ .$$

■

Exempel 1.14 Här följer några exempel på tal och deras inverterade värde.

x	2	$0,5$	-3	$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{0,5} = 2$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

■

Allmänt gäller att

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \tag{1.5}$$

Vi bevisar detta genom att förlänga med b:

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\frac{a}{b}} \cdot \frac{b}{b} = \frac{1 \cdot b}{\frac{a}{b} \cdot b} = \frac{b}{a}$$

Det inverterade värdet till a är $\frac{1}{a}$, om $a \neq 0$. Multipliceras ett tal med sitt inverterade värde erhålls talet 1.

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \tag{1.6}$$

Likheten (1.6) kan mer eller mindre ses som en definition av inverterat värde. Till ett givet $a \neq 0$ finns precis ett inverterat värde. Det inverterade värdet av $a \neq 0$ är $1/a$ och det inverterade värdet till $1/a$ är a.

Exempel 1.15 Division kan uppfattas som multiplikation med det *inverterade värdet* och vice versa.

$$\frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{x+1} = 3 \cdot \frac{1}{x+1}, \quad \frac{2}{y} = 2 \cdot \frac{1}{y}$$

■

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \tag{1.7}$$

Exempel 1.16 Bråket $\frac{2}{3}$ kan dels uppfattas som talet ”två tredjedelar”, eller som en division ”två dividerat med tre”. Båda dessa synsätt är viktiga.

■

Det bråkstreck i ekvation/identitet (1.5) som står på samma höjd som likhetstecknet kallas *huvudbråkstreck* och är i lite längre än övriga bråkstreck.
Vilket bråkstreck som är huvudbråksteck är väsentligt.

Exempel 1.17

$$\frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{\frac{3}{4}} \cdot \frac{4/3}{4/3} = \frac{\frac{8}{3}}{1} = \frac{8}{3}$$

emedan

$$\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

■

Allmänt gäller följande räkneregler för *dubbelbråk*:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \tag{1.8}$$

Det bevisas genom att förlänga med $\frac{d}{c}$ (Jämför med beviset för (1.5) sidan 9.).

Övningar

1.1 Förenkla

a) $\frac{\frac{5}{3}}{2}$ b) $\frac{5}{\frac{3}{2}}$ c) $\frac{\frac{1}{2xy}}{\frac{2}{4xy^2}}$ d) $\frac{\frac{1}{6x+2}}{\frac{5}{3x+1}}$

e) $\frac{\frac{yx^2}{x}}{3y^2}$ f) $\frac{\frac{-a}{(2ab)^2}}{\frac{a}{-2b}}$ g) $\frac{\frac{6}{x+1}}{\frac{2}{(x+1)^2}}$ h) $\frac{\frac{(x+1)^2}{2}}{\frac{x+1}{6}}$

1.2 Beräkna det inverterade värdet till

a) $\frac{2}{1/2}$ b) $\frac{-5}{3+x}$ c) $\frac{2}{3/4}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ f) $\frac{1/2}{1/3}$ g) $\frac{xy}{x+y}$ h) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

1.3 Visa nedanstående likheter

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{\frac{d}{b}}{\frac{c}{a}} = \frac{\frac{d}{c}}{\frac{b}{a}}$$

1.3 Konsekvenser av den distributiva lagen m.m.

1.3.1 Utveckling och faktorisering

Sambandet (1.4) sidan 5 kallas alltså distributiva lagen. Man skulle kunna kalla den distributiva lagen, som är en i matematiken central räkneregel, för "parantesräkning". Genom att tillämpa denna lag tre gånger (hur?) erhålls

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d = ac + bc + ad + bd \tag{1.9}$$

Man säger att man *utvecklar* paranteserna när man går från VL till HL.
Då man går från HL till VL *faktoriserar* man. Detta är i allmänhet svårare men något som vi kommer att öva mycket på. Observera den principiella skillnaden av att det finns en parantes och att det inte finns en parantes.

Exempel 1.18 Lös ekvationen $3(x+5) = 1$.

Lösning

$$3(x+5) = 1 \iff 3x + 15 = 1 \iff 3x = -14, \quad x = -\frac{14}{3}$$

Ett i allmänhet bättre sätt att lösa ekvationen på är att börja med division.

$$3(x+5) = 1 \iff x + 5 = \frac{1}{3} \iff x = \frac{1}{3} - 5 = \frac{1}{3} - \frac{15}{3} = -\frac{14}{3}$$

■

Exempel 1.19 Vi skall nu försöka att m.h.a. distributiva lagen faktorisera i nedanstående tre exempel, vilka är av stigande svårighetsgrad.

a) Vi börjar med $3x - 6$. Vi försöker bryta ut faktorn 3:
$3x - 6 = 3 \cdot x - 3 \cdot 2 = 3 \cdot (x-2) = 3(x-2)$.

b) Faktorisera $x^2 + x$.

$$x^2 + x = x \cdot x + x \cdot 1 = x \cdot (x+1) = x(x+1)$$

c) I uttrycket $3(x+1) - x(x+1)$ är det frestande att utveckla de båda paranteserna så att vi får

$$3(x+1) - x(x+1) = 3x + 3 - [x^2 + x] = 3x + 3 - x^2 - x = 3 + 2x - x^2$$

Men uppgiften är att faktorisera! Vi ser då att i uttrycket
$3(x+1) - x(x+1)$ är $x+1$ *gemensam faktor i båda termer*. Detta innebär att vi kan *bryta ut* denna faktor:

$$3(x+1) - x(x+1) = 3 \cdot (x+1) - x \cdot (x+1) = (3-x)(x+1)$$

■

Gemensam nämnare och termvis division

Vid räkning med bråk brukar man se till att ha en *minsta* gemensam nämnare (MGN):

EXEMPEL 1.20

$$\frac{4}{21}+\frac{8}{15}=\frac{4}{3\cdot 7}+\frac{8}{3\cdot 5}=\{\text{MGN}=3\cdot 7\cdot 5\}=\frac{4\cdot 5+8\cdot 7}{3\cdot 7\cdot 5}=\frac{76}{105}$$

Täljare och nämnare saknar gemensamma faktorer och bråket kan således inte förkortas.
Att skriva summan av två tal på gemensam nämnare följer av distributiva lagen ty

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}+\frac{5}{6} &= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2}+\frac{5}{6}=\frac{1}{6}\cdot 4+\frac{1}{6}\cdot 5= \\ &= \frac{1}{6}(4+5)=\frac{4+5}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3\cdot 3}{3\cdot 2}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

■

EXEMPEL 1.21 Förenkla nedanstående uttryck.

a) $\frac{x}{3}-\frac{2x}{3}$ b) $\frac{6x^2}{3}-\frac{(4x)^2}{2}$ c) $\frac{5}{6x}+\frac{1}{2x}$

Lösning

Här följer nu direkta omskrivningar av respektive uttryck.

a)

$$\frac{x}{3}-\frac{2x}{3}=\{\text{MGN}\}=\frac{x-2x}{3}=\frac{-x}{3}=-\frac{x}{3}$$

b)

$$\frac{6x^2}{3}-\frac{(4x)^2}{2}=2x^2-\frac{4^2\cdot x^2}{2}=2x^2-8x^2=-6x^2$$

c)

$$\frac{5}{6x}+\frac{1}{2x}=\{\text{MGN}\}=\frac{5}{6x}+\frac{1}{2x}\cdot\frac{3}{3}=\frac{5}{6x}+\frac{3}{6x}=\frac{5+3}{6x}=\frac{8}{6x}=\frac{4}{3x}$$

■

Exempel 1.22 Att skriva på gemensamt bråkstreck har en motsvarande omvänd process, *termvis division.*

$$\frac{12+5x}{10} = \frac{12}{10} + \frac{5x}{10} = \frac{6}{5} + \frac{x}{2}$$

■

Exempel 1.23 Division med en gemensam nämnare fungerar som parantesräkning, d.v.s. följer den distributiva lagen ($c \neq 0$).

$$\frac{a+b}{c} = (a+b) \cdot \frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

■

Exempel 1.24 Vad innebär minustecken framför parantes? Vi använder omskrivningen $-2 = (-1) \cdot 2$ etc och använder distributiva lagen.

$$-(a+b) = (-1) \cdot (a+b) = (-1) \cdot a + (-1) \cdot b = -a - b$$

$$-(b-c) = (-1) \cdot (b-c) = (-1) \cdot b - (-1) \cdot c = -b - (-c) = -b + c = c - b$$

■

- Observera att minustecknet innebär teckenändring på samtliga termer i parantesen!
- Man *behöver* givetvis inte multiplicera in -1 i parantesen men det viktiga är att veta vad det innebär. Omvänt kan man bryta ut ett minustecken, såsom i nästa exempel.

Exempel 1.25

$$3 - a - \sqrt{2} = \ldots = -(a + \sqrt{2} - 3) \text{ och } 2x - 10 = -2(5 - x)$$

■

Övningar

1.4 Skriv om uttrycken genom att multiplicera in -1 i paranteserna.

a) $3-(4x-y+3)$ b) $x^2-y^2-(x^2-y^2)$

c) $-(x+4-[3x-3])$ d) $\sqrt{x-y}-(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

1.5 Bryt ut ett minustecken i nedanstående uttryck.

a) $2x-\sqrt{3}-y$ b) $2-x^2-4x$

c) $x-y-(y-4x)$ d) $x-(\sqrt{x-y}+y+x)$

Exempel 1.26 Vid division som i exempel 1.23 fungerar divisionstecknet som en parantes.

$$-\frac{a+b}{c}=(-1)\cdot\frac{a+b}{c}=\frac{-a-b}{c}=\{\text{och även}\}=\frac{a+b}{-c}.$$

Observera att man måste vara noga med *var* minustecknet står. $\frac{-a+b}{c}$ innebär att endast termen a har ett minustecken framför sig emedan $-\frac{a+b}{c}$ betyder att *hela* uttrycket $\frac{a+b}{c}$ är försett med ett minustecken.

■

Exempel 1.27 MGN då nämnarens symboliseras av bokstäver.

$$\frac{2}{x}-\frac{3x-1}{xy}+\frac{3}{y}=\{\text{MGN}=xy\}=$$

$$=\frac{2}{x}\cdot\frac{y}{y}-\frac{3x-1}{xy}+\frac{3}{y}\cdot\frac{x}{x}=\frac{2y-(3x-1)+3x}{xy}=\frac{2y+1}{xy}$$

Observera att vi använt $-(3x-1)=-3x+1$.

■

Exempel 1.28 Uttrycket $x-2$ kan också skrivas $-2+x=-2-(-x)=-(2-x)$. P.s.s. är $a-b=-(b-a)$. Kvoten $\frac{x-2}{a-b}$ kan alltså skrivas om som följer:

$$\frac{x-2}{a-b}=\frac{-(2-x)}{-(b-a)}=\frac{2-x}{b-a}$$

$\blacksquare$

Övningar

1.6 Skriv om följande uttryck som i exemplet ovan. Uttryck svaret som en likhet.

$$\text{a)}\ \frac{2b-3}{4-x} \qquad \text{b)}\ \frac{x^2-a^2}{3-x} \qquad \text{c)}\ \frac{1-7x}{-1-x}$$

$$\text{d)}\ \frac{x-3-y}{y-2x} \qquad \text{e)}\ \frac{-x^2+1}{1-y^2} \qquad \text{f)}\ \frac{y-(3x-2)}{x-(3y+2)}$$

1.7 Beräkna $-a^2$ och $(-a)^2$ om

$$\text{a)}\ a=7 \quad \text{b)}\ a=-\frac{9}{2} \quad \text{c)}\ a=\sqrt{3} \quad \text{d)}\ a=-\sqrt{14}$$

1.8 a) Sätt $f(x)=\dfrac{x^2}{4}+5x+1$ ("$f(x)$" uttalas "f av x".).
Beräkna $f(-2)$, $f(1)$ samt $f(\sqrt{2})$
b) Sätt $f(x)=\sqrt{x^2+9}$
Beräkna $f(-4)$, $f(6)$ samt $f(\sqrt{3})$

1.9 Utveckla nedanstående uttryck med distributiva lagen.

$$\text{a)}\ 3(5x+2) \qquad \text{b)}\ (3-2t)4 \qquad \text{c)}\ 2(x+\sqrt{x})$$

$$\text{d)}\ 2(x-y-1) \qquad \text{e)}\ (3x-1)(x+1) \qquad \text{f)}\ (\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$\text{g)}\ (x-1)(x-1) \qquad \text{h)}\ \sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{8}) \qquad \text{i)}\ (2a+1)(2a-1)$$

1.10 Faktorisera följande uttryck med distributiva lagen.

$$\text{a)}\ 3x-12 \qquad \text{b)}\ 2x+x^2 \qquad \text{c)}\ 3t^2+6$$

$$\text{d)}\ 14-49x \qquad \text{e)}\ 7x-x^2-x^3 \qquad \text{f)}\ 3x^2-27$$

1.3.2 Några härledda identiteter

Om två faktorer båda består av två termer erhålls utvecklingen (Se (1.9) sidan 11)

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

och speciellt då de båda paranteserna är lika:

$$(a+b)(a+b)=a\cdot a+ab+ba+b\cdot b$$

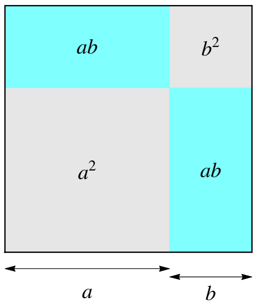
eller skrivet m.h.a. kvadrater:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.10}$$

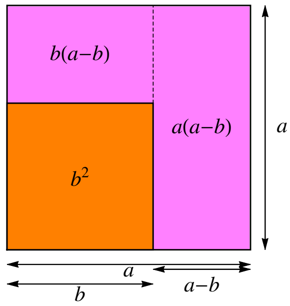
Denna regel kallas som bekant *första* kvadreringsregeln. Ur denna kan man ta fram *andra* kvadreringsregeln [2]

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Man kan geometriskt motivera identiteten $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ för $a > 0, b > 0$ med figuren nedan t.v. och p.s.s. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, *t.h.*



Figuren föreställer en kvadrat med sidolängd $a+b$. Arean kan dels skrivas $(a+b)^2$ och dels $a^2 + b^2 + ba + ab$.



Figuren föreställer en stor kvadrat med sidolängd a och en liten kvadrat med sidolängd b. Differensen mellan kvadraternas areor är dels $a^2 - b^2$ och dels $b(a-b)+a(a-b) = (a+b)(a-b)$.

a)	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	Konjugatregel
b)	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1:a kvadreringsregeln
c)	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	2:a kvadreringsregeln
d)	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	Konjugatregel
e)	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	Konjugatregel
f)	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1:a kuberingsregeln
g)	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	2:a kuberingsregeln
h)	$a^n - b^n =$ $(a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$ (Allmänna konjugatregeln)	

(1.11)

[2] Skall ej förväxlas med konjugatregeln: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Den översta kallas konjugatregeln och bevisas enklast genom utveckling av HL:

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$$

De två efterföljande identiteterna visade vi på sidan 16. Allmänt, hur man utvecklar $(a+b)^n$ finns i avsnitt 1.11. Vi ger nu några exempel på identiternas tillämpning.

Exempel 1.29 Faktorisera $25 - 4x^2$.

Lösning

$$25 - 4x^2 = 5^2 - (2x)^2 = (5-2x)(5+2x)$$

■

Exempel 1.30 Utveckla nedanstående uttryck

a) $(3-x)^2$ b) $(2x+1)^2$

c) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ d) $(2x-1)^3$

Lösning

a)

$$(3-x)^2 = 3^2 - 2\cdot 3\cdot x + (-x)^2 = x^2 - 6x + 9$$

b)

$$(2x+1)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 1\cdot 2x + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

c)

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

d) Här använder vi andra kuberingsregeln (1.11 g))

$$\begin{aligned}(2x-1)^3 &= (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 1 + 3(2x)^1\cdot 1^2 - 1^3 = \\ &= 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1.\end{aligned}$$

■

Övningar

1.11 Faktorisera

$$\text{a)}\quad 5x+\frac{x}{2}\qquad \text{b)}\quad \frac{5x}{3}-\frac{x^2}{3}\qquad \text{c)}\quad \frac{9y}{x}+\frac{6y}{x^2}$$

1.12 Utveckla nedanstående uttryck

$$\text{a)}\quad (a+2)(b-1)\qquad \text{b)}\quad \left(\frac{x}{2}-1\right)(x+4)$$

$$\text{c)}\quad (2a+3)^2\qquad \text{d)}\quad (x+1)(x^2-x+1)$$

1.13 Försök att faktorisera, d.v.s. skriv som produkten av två paranteser:

$$x-a^2-a+xa$$

1.14 Utveckla $(a+b-c)^2$

1.15 a) Ett badkar med volym 240 liter fylls på 20 minuter då proppen är i. Från att vara fullt, töms samma badkar på 16 minuter.
Hur snabbt töms badkaret om det är fullt, det fylls och proppen inte är i?

b) Ett badkar fylls på x minuter då proppen är i. Från att vara fullt, töms samma badkar på y minuter.

I. Ge ett villkor på x och y så att det fulla badkaret, som fylls, töms när proppen inte är i.
II. Uttryck den tid i minuter det tar att tömma badkaret under detta villkor.
III. Använd uttrycket i II. för att lösa a)-uppgiften.

1.16 En bassäng kan fyllas genom tvenne olika stora rör och tömmas genom ett tredje, som är lika stort som det minsta tilloppsröret. Om båda tilloppsrören äro öppna, blir dammen full på 20 minuter. äro det större tilloppsröret och avloppsröret öppna, blir den full på 1 timme. Huru lång tid skulle åtgå för att genom vart och ett av tilloppsrören fylla dammen?

1.17 Bevisa identiteterna i (1.11) genom att utveckla faktoriserat led!

1.3.3 Förenkling av uttryck I

Exempel 1.31 a) Bryt ut största möjliga heltal ur $\sqrt{72}$ så att det fortfarande står ett heltal under rottecknet.

$$\sqrt{72}=\sqrt{9\cdot 8}=\sqrt{3^2\cdot 2^2\cdot 2}=\sqrt{3^2\cdot 2^2}\sqrt{2}=3\cdot 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

b) Bryt ut 4 ur rottecknet nedan...

$$\sqrt{4x+8}=\sqrt{4(x+2)}=\sqrt{4}\sqrt{x+2}=2\sqrt{x+2}$$

c) Multipicera in faktorn 5 i rottecknet...

$$5\sqrt{12} = \sqrt{5^2}\sqrt{12} = \sqrt{5^2 \cdot 12} = \ldots = \sqrt{300}$$

■

EXEMPEL 1.32 Förenkla uttrycket $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$.

Lösning

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$$

■

EXEMPEL 1.33 Vi har tidigare förenklat dubbelbråk. Förenkla $\dfrac{\frac{3x+2}{2}}{6x^2+4x}$.

Lösning

$$\frac{\frac{3x+2}{2}}{6x^2+4x} = \frac{3x+2}{2(6x^2+4x)} = \frac{3x+2}{2 \cdot 2x(3x+2)} = \frac{1}{4x}$$

■

Förlängning med konjugat

En typ av förenkling/omskrivning kan göras med *förlängning med konjugat*. Konjugatet till $2+\sqrt{5}$ är $2-\sqrt{5}$ och vice versa.

EXEMPEL 1.34 Förenkla uttrycket $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

Lösning

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \{\text{Förläng med } \textit{konjugatet} \text{ till nämnaren}\} =$$
$$= \frac{3-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})}{4-3} = 3+\sqrt{3}$$

■

Exempel 1.35 Förenkla uttrycket $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}}$

Lösning

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}} =$$
$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

■

Exempel 1.36 Förenkla $(12+\sqrt{6})^2 - (12-\sqrt{6})^2$

Lösning

Man kan utveckla båda kvadraterna men eftersom det är ett minustecken mellan kan man använda konjugatregeln:

$$\begin{aligned} (12+\sqrt{6})^2 - (12-\sqrt{6})^2 &= \\ ((12+\sqrt{6}+12-\sqrt{6}))(12+\sqrt{6}-(12-\sqrt{6})) &= \\ = 24\cdot 2\sqrt{6} &= 48\sqrt{6} \end{aligned}$$

■

Exempel 1.37 Förenkla uttrycket $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Lösning

Vi börjar med att förlänga med $1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-4-2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}}\cdot\frac{4-2\sqrt{6}}{4-2\sqrt{6}}=\ldots=\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

■

Exempel 1.38 Förenkla $\sqrt{\dfrac{7}{3+\sqrt{2}}}$

Lösning

Vi förlänger med nämnarens konjugat:

$$\sqrt{\frac{7}{3+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{7}{3+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}}==\sqrt{\frac{7(3-\sqrt{2})}{9-2}}=\sqrt{3-\sqrt{2}}$$

■

Övningar

1.18 Bryt ut lämpligt heltal ur följande rötter

a) $\sqrt{125}$ b) $\sqrt{126}$ c) $\sqrt{128}$ d) $\sqrt{132}$

1.19 Multiplicera in talen t.v. om rottecknet

a) $3\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $7\sqrt{2}$ d) $-2\sqrt{35}$

1.20 Förenkla. . .

a)	$\sqrt{36}$	b)	$\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$	c)	$\dfrac{\sqrt{18}}{3\sqrt{2}}$	d)	$\dfrac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$
e)	$\dfrac{4}{\sqrt{8}}$	f)	$\dfrac{10}{2\sqrt{5}}$	g)	$\dfrac{\sqrt{8}}{4}$	h)	$\dfrac{\sqrt{50}}{5}$
i)	$\sqrt{13^2-5^2}$	j)	$\dfrac{\sqrt{125}}{5}$	k)	$\dfrac{132}{2\sqrt{12}}$	l)	$\dfrac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$

1.21 Förkorta så långt som möjligt

a) $\dfrac{6x^2y}{2x(y-1)}$ b) $\dfrac{5(7y)^2}{35y^3}$ c) $\dfrac{t^2-1}{t+1}$ d) $\dfrac{2t}{t^2+2t}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{24}{\sqrt{12}}$ g) $\dfrac{(x\sqrt{2})^2}{4x^2}$ h) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$

i) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ j) $\dfrac{3x}{\sqrt{3x}}$ k) $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}$ l) $\dfrac{(2x+1)^2-(2x-1)^2}{4x}$

1.22 Förenkla uttrycken nedan.

a) $\dfrac{b-a}{a-b}$ b) $\dfrac{a}{x-y}+\dfrac{a}{y-x}$

c) $\dfrac{4}{2n-2}+\dfrac{6}{3-3n}$ d) $(a-b)(x+y+z)+$ $+(b-a)(x+y-z)$

e) $(a-b)^2-(b-1-a)(b-\ a)$ f) $\dfrac{x^2-x}{x^2-1}$

1.23 Förenkla

a) $\dfrac{\dfrac{14x-y}{y/2-7x}}{2}$ b) $\dfrac{5x^2-20}{\dfrac{x+2}{2x}}$ c) $\dfrac{\dfrac{1}{2xy-1}}{\dfrac{2}{4(xy)^2-1}}$

d) $\dfrac{\dfrac{1}{6x+2}}{\dfrac{1}{3x+1}-\dfrac{1}{6x+2}}$ e) $\dfrac{3-5x}{\dfrac{5}{3}(x-1)+\dfrac{2}{3}}$ f) $\dfrac{1}{\dfrac{a}{2b}+\dfrac{2a}{b}}$

1.24 Förenkla nedanstående uttryck så långt som möjligt

a) $\dfrac{2}{4-\sqrt{12}}$ b) $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ c) $\dfrac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{\sqrt{17}-\sqrt{13}}{\sqrt{17}+\sqrt{13}}$ e) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$ f) $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

1.3.4 Inledande ekvationslösning

Exempel 1.39 Betrakta ekvationen $3x = 0$. För att en produkt skall vara $= 0$ måste någon av faktorerna vara $= 0$. Nu är första faktorn $= 3$. Således måste den andra vara $= 0$, d.v.s. $x = 0$.

I ekvationen $3(2x + 5) = 0$ är den första faktorn 3 varför det är den andra som måste vara $= 0$. D.v.s.

$$2x + 5 = 0 \Longleftrightarrow 2x = -5 \Longleftrightarrow x = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$$

Ekvationen $(3x + 21)(x - 2) = 0$ är detsamma som att var och en av faktorerna är $= 0$. De *rötter* eller *lösningar* som ekvationen har är de x vilka löser ekvationen.
Alltså har vi dels att $3x + 21 = 0$ *eller* $x - 2 = 0$. Lösningarna/rötterna fös, som tidigare, genom enkel aritmetik:

$$3x + 21 = 0 \Longleftrightarrow 3x = -21 \Longleftrightarrow x = \frac{-21}{3} = -7, \quad x - 2 = 0 \Longleftrightarrow x = 2$$

Svar: Rötterna är $x = -7$ och $x = 2$.

■

Exempel 1.40 I ekvationen $x(x+1) = 3(x+1)$ kan det vara frestande att börja med att förkorta $x + 1$ men förkortning är egentligen division. Alltså vill vi utföra en division med $x + 1$ i båda led och erhåler då $x = 3$. Division med talet 0 får inte göras. Division med $x + 1$ får alltså inte göras om $x + 1 = 0$, d.v.s. om $x = -1$.
Vad man då kan göra är att undersöka om $x = -1$ är lösning till ekvationen:

$$VL = (-1 + 1) \cdot (-1) = 0 \text{ och HL} = 3 \cdot (-1 + 1) = 3 \cdot 0 = 0$$

Eftersom båda led är lika är $x = -1$ en lösning.
Därefter söker vi de lösningar/rötter där $x+1 \neq 0$ och får således förkorta med denna faktor och får $x = 3$.
Svar: $x = -1$ eller $x = 3$
Alternativt kan man flytta över endera termen och använda distributiva lagen på detta led (Jämför exempel 1.19 c):

$$(x + 1)x = 3(x + 1) \Longleftrightarrow x(x + 1) - 3(x + 1) = (x - 3)(x + 1) = 0$$

Nu ges rötterna av de x som gör att endera faktorn ,i detta fall endera av parantesen, $= 0$. Vi får ekvationerna $x - 3 = 0$ respektive $x + 1 = 0$ som också ger $x = -1$ och $x = 3$.

■

Betrakta *ekvationen* $a + b = c$.
Man kan här *addera* talet $-a$ i båda led. Vi får då $a + b - a = c - a$. Nu är

$VL = a + b - a = b + a - a = a + 0 = b$.
Därmed har vi fått $b = c - a$. Addition med motsvarande tal med omvänt tecken är orsaken till att termer flyttas över från det ena ledet till det andra och *därmed* byter tecken.
Vi kan flytta tillbaka $-a$ från VL till HL och återigen få $a + b = c$. Man säger att $a + b = c$ är *ekvivalent* med att $b = c - a$. Detta skrivs alltså med ekvivalenspilen $\Longleftrightarrow$:

$$a + b = c \quad \Longleftrightarrow \quad b = c - a \tag{1.12}$$

Till ekvation (1.12) finns en likadan ekvivalens för multiplikation.

$$a \cdot b = c \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{c}{b}, \qquad (b \neq 0) \tag{1.13}$$

För manipulation av uttryck såsom ekvationslösning används (1.12) och (1.13).I en del litteratur (liksom här) skriver man "omm" som betyder *om och endast om*, detta för att beteckna ekvivalens.

Exempel 1.41 För att lösa ekvationen $\frac{3x}{5} = 2$ kan man i båda led multiplicera med talet 5 åtföljt av division med 3:

$$\frac{3x}{5} \cdot 5 = 2 \cdot 5 \Longleftrightarrow 3x = 10 \Longleftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{10}{3} \Longleftrightarrow x = \frac{10}{3}$$

Genom att från början multiplicera med talet 5/3 i båda led erhålls lösningen snabbare.

■

Exempel 1.42 Lös ekvationen $7x - 3 = 3x - 5$.

Lösning

Vi börjar att "flytta" $x-$termer så att vi enbart har sådana termer i *ett* av leden:

$$7x - 3 = 3x - 5 \Leftrightarrow 7x - 3 - 3x + 3 = 3x - 5 - 3x + 3$$

d.v.s.

$$4x + 0 = -2 \Longleftrightarrow x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

■

Exempel 1.43 Vissa ekvationer saknar lösning och vissa har flera lösningar. Lös ekvationerna

a) $3x + (5x - 1) = 2(4x + 1)$ b) $3x + (5x + 2) = 2(4x + 1)$

Lösning

a) VL och HL kan skrivas om så att vi för likheten $8x - 1 = 8x + 2$ (HL $=$ $2(4x + 1) = 2 \cdot 4x + 2 \cdot 1 = 8x + 2$). Genom att subtrahera $8x$ (d.v.s. addera $-8x$) till båda led erhåller vi

$$8x - 1 - 8x = 8x + 2 - 8x \text{ d.v.s. } 0 - 1 = 0 + 2$$

Det är klart att $-1 = 2$ är en orimlighet. Hur skall detta tolkas? Jo, det finns inget x sådant att $-1 = 2$. Detta innebär att den ursprunliga ekvationen saknar lösning.

b) VL $= 8x + 2$ och HL $= 8x + 2$. Alltså har vi $8x + 2 = 8x + 2$. Här står identiskt samma uttryck i båda led. Oberoende vilket x som sätts in i ekvationen så är ekvationen uppfylld. Således är alla x lösningar till ekvationen. Vi kan skriva *lösningsmängden* som $\mathbb{R}$ eller uttrycka svaret med att $x \in \mathbb{R}$.

■

Övningar

1.25 Lös ekvationerna (d.v.s. lös ut x). Man kan kanske tänka ut svaret men undvik det och följ i stället exemplena ovan.

a) $22x + 12 = 0$ b) $\frac{13 - x}{4} + \frac{2}{5} = 1$ c) $\frac{2x - 1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{x}{2}$

d) $\frac{1}{3}(x - 3) = 1 - 2x$ e) $x \cdot \frac{13}{4} = \frac{2x}{5}$ f) $\frac{x - 2}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{x}{6}$

1.4 Polynom

Vi har tidigare behandlat lösningar av enklare ekvationer.

Exempel 1.44

- $2x^3$, $-x^4$, och $x^0 (= 1)$ är *monom* i variabeln x.
- Ett uttryck såsom $2 - 3x$ kallas ett *polynom i variabeln* x. Detta polynom är ett *förstagradspolynom* p.g.a. termen $x = x^1$.

- Ex.vis är ett uttrycket $4 = 4 \cdot 1 = 4 \cdot x^0$, ett monom av grad 0.
- Ekvationen $2 - 3x = 1$ är ett exempel på en polynomekvation. Eftersom den högsta potensen av x är x^1 i denna ekvation, så kallas ekvationen *förstagradsekvation.*
- Det/de x som är lösning till ekvationen $2 - 3x = 1$ kallas *rot.*
- Det/de x som löser ekvationen $2 - 3x = 0$ kallas *nollställe* till polynomet $2 - 3x$. För att *lösa* ekvationen $2 - 3x = 0$ adderar vi $3x$ till båda led åtföljt av division med 3 i båda led:

  $$2 - 3x + 3x = 0 + 3x, \qquad 2 = 3x, \qquad \frac{2}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

  Lösningen/roten till ekvationen är $x = \dfrac{2}{3}$. Detta x är alltså nollstället till polynomet $2 - 3x$.
- För så enkla ekvationer är det i allmänhet onödigt att kontrollera att detta x verkligen är en rot men låt oss ändå göra det för att se hur det går till: $2 - 3 \cdot \dfrac{2}{3} = 2 - 2 = 0$.
- $\sqrt{2} - 3x + 2x^2$ är ett *andragradspolynom.* Ekvationen $\sqrt{2} - 3x + 2x^2 = 2x^3$ är en tredjegradsekvation.

■

$$\text{Ett monom är } x^n \quad \text{där } n \text{ är ett heltal} \geq 0 \tag{1.14}$$

Ett förstagradspolynom (i variabeln x) ges av

$$ax + b \quad \text{där } a \neq 0 \tag{1.15}$$

Ett andragradspolynom (i variabeln x) ges av

$$ax^2 + bx + c \quad \text{där } a \neq 0 \tag{1.16}$$

Exempel 1.45 $1 + 3x - \sqrt{2}x^2$ är ett andragradspolynom. Talen $1, 3, -\sqrt{2}$ kallas polynomets *koefficienter.*

■

En andragradsekvation i x är en ekvation som kan skrivas

$$ax^2 + bx + c \quad = \quad 0 \quad (a \neq 0) \tag{1.17}$$

Koefficenterna i (1.17) är alltså a, b och c. a är andragrads-, b förstagrads- och c nolltegradskoefficient. Man kan också indexera koefficienterna. a kan man skriva a_2 (läses "a-två"). P.s.s. skriver vi $b = a_1$ och $c = a_0$.

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad = \quad 0 \quad (a_2 \neq 0) \tag{1.18}$$

Ett allmänt tredjegradspolynom kan skrivas

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad (a_3 \neq 0) \tag{1.19}$$

Exempel 1.46 I polynomet $4x^3 - x + \sqrt{2}$ är $a_3 = 4$, $a_2 = 0(!)$, $a_1 = -1$ och $a_0 = \sqrt{2}$ med beteckningar enligt (1.19).

■

Ett polynom av grad n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ i variabeln x ser ut som följer

$$\boxed{f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0} \qquad a_n \neq 0 \tag{1.20}$$

1.4.1 Kvadratkomplettering

För att bestämma det största eller minsta värdet av ett andragradspolynom och för att faktorisera andragradsuttryck samt lösa andragradsekvationer använder man *kvadratkomplettering*.

Exempel 1.47 Bestäm det minsta värdet av $x^2 + 6x - 7$.

Lösning

$$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2 \cdot 3x - 7 = \underbrace{x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2}_{\text{en jämn kvadrat}} - 3^2 - 7 = (x+3)^2 - 16$$

Eftersom kvadraten ≥ 0 måste det minsta värdet vara -16, som antages då $x = -3$.

■

1.4.2 Lösning av andragradsekvation

För att lösa ett andragradspolynom gör vi på liknande sätt som i det föregående exemplet.

EXEMPEL 1.48 Andragradsekvationen $x^2 = 3$ har rötterna $x = \pm\sqrt{3}$.

■

EXEMPEL 1.49 Lös ekvationen $x^2 + 6x = 7$.

Lösning

$$x^2 + 6x = 7 \Longleftrightarrow x^2 + 6x - 7 = 0$$

Nu kan vi göra samma omskrivning som i exempel 1.47.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x - 7 \quad &= x^2 + 2 \cdot 3x - 7 = x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2 - 7 = \\ &= (x+3)^2 - 16 = 0 \Longleftrightarrow (x+3)^2 = 16 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x + 3 = \pm 4 \Longleftrightarrow x = 1 \text{ eller } x = -7 \end{aligned}$$

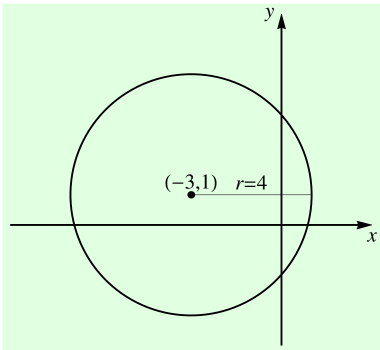
■

EXEMPEL 1.50

Ekvationen $x^2 + 6x + y^2 - 2y = 6$ är en ekvation för en cirkel. Kvadratkomplettering m.a.p. x och y var och en för sig, ger

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) - 10 = 6$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 16\,.$$

Cirkeln har medelpunkt i $(-3, 1)$ och radie $r = 4$.



■

1.4.3 Kvadratkomplettering och lösning av allmän andragradsekvation

Vi demonstrerar nu vad som menas med *kvadratkompletterering* och börjar då med uttrycket $ax^2 + bx + c$.

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = \{\text{Sätt } b/a = p \text{ och } c/a = q.\} = a\left(x^2 + px + q\right)$$

därefter gör vi omskrivningen

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

därmed är

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right)$$

Detta resultat men även processen fram till resulatet kallas *kvadratkomplettering*. Denna kan användas för att lösa en andragradsekvation. För att lösa ekvation (1.17) gör vi en division med a (Observera att i HL ($= 0$) också divideras med a och att $0/a = 0$) åtföljt av samma omskrivning av VL $x^2 + px + q$ som vid kvadratkomplettering:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Under förutsättning att $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ kan vi nu ta roten ur båda led och erhålla den s.k. p, q formeln. Vi formulerar det som en sats.

Sats 1.1 Om $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ så gäller ekvivalensen

$$\begin{gathered} x^2 + p\,x + q = 0 \\ \iff \\ x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{gathered} \tag{1.21}$$

Exempel 1.51 Betrakta polynomet $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ och ekvationen $f(x) = 0$.[3]

Rötterna till ekvationen får man med "$p - q$"-formeln (1.21). Man dividerar med 3 för att få ekvationen på rätt form, varvid $p = 2/3$ och $q = -1/3$ (Gör räknngarna som övning!). Rötterna blir $x = -1$ och $x = 1/3$. Observera att vi därmed har löst ekvationen

$$x^2 + \frac{2x}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

Har man väl funnit rötterna, så visar det sig att man erhåller en faktorisering av polynomet:

$$\begin{gathered} x^2 + \frac{2x}{3} - \frac{1}{3} = (x - (-1))(x - 1/3) = \\ = (x + 1)(x - 1/3) \Rightarrow f(x) = 3(x + 1)(x - 1/3) = (x + 1)(3x - 1) \end{gathered}$$

Genom att utveckla produkten $(x+1)(3x-1)$ visar man lätt att detta verkligen är polynomet $f(x)$.

■

[3] "f(x)" läses "f av x". Vi använder här en s.k. funktion.

1.4.4 Faktorsatsen

Detta samband mellan ett polynoms nollställen och dess faktorisering gäller generellt.
Har man funnit faktoriseringen så har man funnit polynomets nollställen och vice versa. Denna ekvivalens kallas

Sats 1.2 Faktorsatsen

Ekvivalensen nedan håller generellt för polynom $f(x)$:

$$x = a \text{ är en rot till polynomet } f(x) = 0 \text{ d.v.s. } f(a) = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ (x-a) \text{ är en faktor till } f(x) \tag{1.22}$$

Vi bevisar den ena implikationen ($\Leftarrow$).

Bevis: Antag att $(x - a)$ är faktor till polynomet $f(x)$, d.v.s. att

$$f(x) = (x-a)q(x)$$

där $q(x)$ är ett polynom (av en grad lägre än $f(x)$). Genom att sätta $x = a$ i båda led erhålls att

$$f(a) = (a-a)q(a) = 0 \cdot q(a) = 0$$

Den andra implikationen visas med s.k. polynomdivision (sid 43 avsnitt 1.5.1).

■

Exempel 1.52 Att faktorisera m.h.a. *kvadratkomplettering* innebär en genväg. Man behöver inte utnyttja formeln (1.21) för att faktorisera ett andragradspolynom.

$x^2-2x-3 = (x-1)^2-4 = (x-1)^2-2^2 = (x-1-2)(x-1+2) = (x-3)(x+1)$

■

Sats 1.3 Varje polynom kan faktoriseras i faktorer av högst grad 2.
Vi bevisar inte satsen. Den bevisas med talalgebrans fundamentalsats och komplexa tal. Ett exempel för illustrera satsen.

Exempel 1.53 Polynomet $x^3 + 8$ (som är av grad 3) kan faktoriseras (m.h.a. konjugatregeln (1.11 e) sidan 16)):

$$x^3 + 8 = x^2 + 2^3\{a = x, b = 2\} = (x+2)(x^2-2x+4)$$

Polynomet $x^2 - 2x + 4$ kan inte faktoriseras till förstagradspolynom. Detta inser man när man försöker lösa ekvationen $x^2 - 2x + 4 = 0$.

■

EXEMPEL 1.54 Faktorisera polynomet $f(x) := x^3 - 4x^2 - 5x$.

Lösning

Först och främst kan vi faktorisera ut faktorn x: $x^3 - 4x^2 - 5x = x(x^2 - 4x - 5)$. För att faktorisera det återstående andragradspolynomet $x^2 - 4x - 5$ kan vi använda ekvation (1.21) för att lösa $x^2 - 4x - 5 = 0$ eller alternativt kvadratkomplettera.

$$x^2 - 4x - 5 = x^2 - 2 \cdot x + 2^2 - 9 =$$

$$= (x-2)^2 - 3^2 = (x - 2 + 3)(x - 2 - 3) = (x+1)(x-5)$$

Faktoriseringen är alltså $x(x+1)(x-5)$,
d.v.s $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x = x(x+1)(x-5)$.

■

Faktorsatsen och p-q formeln

Å ena sidan kan vi lösa andragradsekvationen $x^2 + px + q = 0$ m.h.a. (1.21). nollställena, som nu kallas[4] x_1 och x_2 ges av

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \text{ respektive } x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Å andra sidan erhåller vi en faktorisering av $x^2 + px + q$ enligt faktorsatsen. Detta säger att $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$. Vi utgår från HL i denna ekvation och visar nu att vi kan komma fram till VL. Med x_1 och x_2 som ovan erhålls faktoriseringen

$$\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = \ldots =$$

$$\left\{\ldots \text{ utnyttja konjugatregeln med } a = x + p/2 \text{ och } b = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\} =$$

$$\ldots = \left(x + \tfrac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q\right) = x^2 + 2 \cdot x \cdot \tfrac{p}{2} + \left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q\right) =$$

$$= \ldots = x^2 + px + q$$

[4]Talen 1 och 2 t.h. snett nedanför x kallas index och läses "x-ett" respektive "x-två". Dessa utgör endast en numrering av $x-$värdena.

Övningar

1.26 Betrakta följande polynom

a) $f(x) = (x-2)(x+1)$ b) $f(x) = (x+3)(3x-2)$

c) $f(x) = (2+x)(3-4x)$ d) $f(x) = (x+1)(7x-2)$

1. Lös ekvationen $f(x) = 0$
2. Utveckla polynomet och lös därefter ekvationen $f(x) = 0$.

1.27 Betrakta polynomen

a) $f(x) = 3x + x^2$ b) $f(x) = x^2 + x - 2$

c) $f(x) = 2x^2 + 7x - 9$ d) $f(x) = 3x - 5 - x^2$.

1. Kvadratkomplettera respektive polynom.
2. Bestäm polynomets minsta (största) värde.
3. Faktorisera (om möjligt) polynomet i förstagradspolynom.
4. Lös (om möjligt) ekvationen $f(x) = 0$.

1.28 Lös ekvationerna

a) $x^2 = 4x - 3$ b) $\dfrac{x^2}{2} = 2x + 5$ c) $\dfrac{1}{x} - x = 0$

d) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ e) $\dfrac{2}{x-2} = x + 1$ f) $\sqrt{x} = x - 2$

1.29 Lös ekvationerna och skriv VL som en produkt av förstagradspolynom

a) $6\,x^2 - 11x - 35 = 0$ b) $9\,x^2 + 26x - 3 = 0$

c) $x^2 - x\sqrt{2} - 1 = 0$ d) $x^2\sqrt{2} - x\sqrt{5} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0$

1.30 bestäm det minsta värdet av uttrycken nedan.

a) $3x^2 + 2x - 1$ b) $x^2 + x + 1$ c) $x^2 + y^2 + x + y + 1$

d) $x^4 - 4x^2 + 1$ e) $x^2y^2 + xy + 2$ f) $\dfrac{1}{x - x^2 - 1}$

1.31 Ekvationen $x^2 - a^2x - b^2x + ab = 0$ har rötterna $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$.
bestäm konstanterna a och b. Det finns fyra fall.

1.4.5 Mer faktorisering

Vi tar nu hjälp av lagarna (1.11).

Exempel 1.55 Faktorisera polynomet x^6+1.

Lösning

Vi börjar med att utnyttja konjugatregeln (1.11 e)) med $a = x^2$ och $b = 1$.

$$x^6+1 = (x^2)^3+1 = (x^2+1)(x^4-x^2+1)$$

Den sista faktorn kan nu skrivas om enligt följande.

$$x^4-x^2+1 = x^4+2x^2+1-3x^2 =$$

$$= (x^2+1)^2-(x\sqrt{3})^2 = (x^2+1+x\sqrt{3})(x^2+1-x\sqrt{3})$$

Vi gör ett försök att faktorisera den sista faktorn:

$$x^2+1-x\sqrt{3} = x^2-2\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4} = \left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

Eftersom vi får en positiv term $\frac{1}{4}$ kan vi inte faktorisera $x^2+1-x\sqrt{3}$ i faktorer av första graden.
Svar: $x^6+1 = (x^2+1)(x^2+1+x\sqrt{3})(x^2+1-x\sqrt{3})$

■

Övningar

1.32 Faktorisera polynomen nedan så långt som möjligt.

a)	$8t^3+1$	b)	t^4-4	c)	t^4-1	d)	t^4-6t^2+1
e)	t^6-1	f)	$x^3+3\sqrt{3}$	g)$*$	x^4+4	h)$*$	x^8-1

Ledning till d): Börja med att sätta $t^2 = x$.

1.33 bestäm konstanten a så att polynomet
$f(x) := 3x^3+5x-a$ har $x = 1$ som nollställe. Faktorisera därefter polynomet så långt som möjligt.

Exempel 1.56 Kan man faktorisera uttrycket $x+y-xy$ på något annat sätt än $(x+y-xy)\cdot 1$? Vi försöker med att bryta ut ett x ur de två första termerna:

$x(1-y)+y$. Vi lyckas tydligen inte att faktorisera *hela uttrycket*. Följande omskrivning lyckas inte heller:

$$x+y-xy = x(1-y)+y-1+1 = x(1-y)-(1-y)+1 = (x-1)(1-y)+1$$

Vi finner alltså ingen "vettig" faktorisering.

■

Exempel 1.57 Försök att faktorisera $a^2b+b-2ab$.

Lösning

$$a^2b+b-2ab = b(a^2-2a+1) = b(a-1)^2$$

(Vi bör vid det här laget känna igen en "jämn kvadrat".)

■

Exempel 1.58 Faktorisera $a^2+4ab-b^2$.

Lösning

Vi försöker med *kvadratkomplettering m.a.p. a*.

$$\left[a^2+2a\cdot 2b+(2b)^2\right]-(2b)^2-b^2 = (a+2b)^2-5b^2$$

De termer innanför den fyrkantiga parantesen utgör en jämn kvadrat. Eftersom vi har ett minustecken mellan kvadraterna kan vi kunna utnyttja konjugatregeln. Först skriver vi $5b^2 = (b\sqrt{5})^2$. Detta ger

$$(a+2b)^2-5b^2 = (a+2b)^2-(b\sqrt{5})^2 = (a+2b-b\sqrt{5})(a+2b+b\sqrt{5})$$

Kvadratkomplettering m.a.p. b ger ett annat resultat.

$$-(b^2-4ab-a^2) = -(b^2-4ab+4a^2-5a^2) =$$

$$= -(b-2a)^2+5a^2 = (a\sqrt{5})^2-(b-2a)^2 = (a\sqrt{5}-b+2a)(a\sqrt{5}+b-2a)$$

■

Övningar

1.34 Försök att faktorisera

a) $a^2 + ab - 6b^2$ b) $x^2 - x - 6$ c) $a^2 + 2\,a\,b - b^2$

d) $1 + x^2 + x\,y^2 + \dfrac{y^2}{x}$ e) $\dfrac{1}{x} + x - 2$ f)* $3\,x^2 + \dfrac{2}{y} - \dfrac{6\,x}{y} - x$

1.4.6 Rotekvationer

Rotekvationer löses via andragradsekvationer. Lösningen av dessa ekvationer brukar ge upphov till falska rötter, d.v.s. man får rötter vilka inte uppfyller den ursprungliga ekvationen.

Exempel 1.59 Lös ekvationen

$$\sqrt{2x-1} + 2 = x$$

Lösning

Genom att flytta över 2 till HL och därefter kvadrera erhålls ($\Rightarrow$)

$$2x - 1 = x^2 - 4x + 4, \Longleftrightarrow 0 = x^2 - 6x + 5$$

vilket kan lösas med formeln

$$x = \frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 5} = \frac{6 \pm 2}{2} = 3 \pm 2$$

Genom att sätta in dessa x i den ursprungliga ekvationen övertygar man sig snart att $x = 1$ inte är lösning. Talet kallas då *falsk* lösning eller falsk rot. däremot visar sig det andra $x-$värdet $x = 5$ vara en lösning. Å andra sidan; kan man vara söker på att alla lösningar är funna? Genom att följa lösningsförloppet kommer vi underfund med det. Steget där båda led kvadreras är ingen ekvivalens:

$$\sqrt{2x-1} = x - 2 \Rightarrow 2x - 1 = (x-2)^2 \text{ gäller}$$

men den omvända implikationen ($\Leftarrow$) gäller ej. P.g.a. att vi har implikation från vänster till höger får man med alla lösningar.
För att en lösning skall vara riktig måste man få $\Leftarrow$ i samtliga led. Detta kräver att $+$ och $-$ i endera ledet vara med:

$$\pm\sqrt{2x-1} = x - 2 \Longleftrightarrow 2x - 1 = (x-2)^2$$

Detta betyder att ekvationen $-\sqrt{2x-1} = x - 2$ *också* löses. D.v.s. den falska roten är lösning till denna ekvation.

■

Ett alternativt sätt att lösa en rotekvation ges nu i följande exempel.

EXEMPEL 1.60 Lös ekvationen $\sqrt{2-2x} = x+3$.

Lösning

Sätt rotuttrycket $\sqrt{2-2x} = t$. då blir $2-2x = t^2$ och därmed $2-t^2 = 2x$. Ekvationen kan då skrivas $t = x+3 = \dfrac{2-t^2}{2} + 3 = 4 - \dfrac{t^2}{2}$.

$$t^2 + 2t - 8 = 0 \Longleftrightarrow t = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3, \quad t = 2, t = -4$$

Eftersom $t = \sqrt{2-2x}$ och en rot alltid ≥ 0 utesluter vi $t = -4$. $t = 2$ ger tillsammans med $t = x+3$ att $x = 2-3 = -1$. insättning i den ursprungliga ekvationen visar att

$$\text{VL} = \sqrt{2-2x} = \sqrt{2-2(-1)} = 2 \text{ och } \text{HL} = -1+3 = 2$$

Svar: $x = -1$

■

EXEMPEL 1.61 Lös ekvationen $\sqrt{1-3x} = 2x-1$.

Lösning

Kvadrering ger

$$1-3x = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1 \Longleftrightarrow 4x^2 - x = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = \frac{1}{4}$$

insättning i de båda leden ger VL $= 1$ och HL $= 2 \cdot 0 - 1 = -1$ respektive

$$\text{VL} = \sqrt{1-3/4} = 1/2 \text{ och } \text{HL} = 2 \cdot 1/4 - 1 = -1/2 < 0$$

Svar: Ekvationen saknar rot.

■

EXEMPEL 1.62 Lös ekvationen $3\,x - 2 = \sqrt{x^2-3}$

Lösning

Kvadrering av båda led ger andragradsekvationen

$$7 - 12\,x + 8\,x^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{7}{8} = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{7}{8}}$$

Talet under rottecknet är $-\dfrac{5}{16} < 0$. Av detta kan vi sluta oss till att rot/lösning saknas.

$\blacksquare$

Övningar

1.35 Lös följande ekvationer:

a) $\sqrt{2x+5} = 5 - x$ b) $\sqrt{x^2+5} = 5 - x$

c) $\sqrt{1-2x} = 2x + 1$ d) $1 + \sqrt{3x^2 - 2} = 2x$

1.36 Lös ekvationerna nedan.

a) $\sqrt{x-4} = \sqrt{x} - 4$ b) $\sqrt{x^2-3} = 1 - x$

c) $x^2 - 1 = (x+1)\sqrt{x^2+3}$ d) $\sqrt{x+2} = 2 - x$

e) $\sqrt{2-3x} = x - 1$ f) $\sqrt{2-x} - 17 = 2x$

g) $x^2 - 1 = (x+1)\sqrt{x^2-5}$ h) $x^2 - 4 = (x-2)\sqrt{x^2-5}$

1.37 Har ekvationen $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+7} = \sqrt{2x}$ någon (reell) rot?

1.4.7 Logik och ekvationslösning

Vi ser i exempel 1.61, att båda rötterna är falska. Genom att testa de två erhållna rötterna i den ursprungliga ekvationen avslöjas om roten är riktig eller falsk. Hur uppkommer falska rötter? Vi ser att från den ursprungliga ekvationen

$$\sqrt{1-3x} \quad = \quad 2x-1 \Longrightarrow 1-3x=(2x-1)^2$$

har vi en implikaton, $\Longrightarrow$, och inte en ekvivalens. För att få ekvivalens krävs $\pm$ framför, exempelvis VL

$$\pm\sqrt{1-3x} \quad = \quad 2x-1 \Longleftrightarrow 1-3x=(2x-1)^2.$$

De två falska rötterna $x=0$ och $x=\dfrac{1}{4}$ är alltså riktiga rötter till ekvationen

$$-\sqrt{1-3x}=2x-1 \text{ eller ekvivalent } \sqrt{1-3x}=1-2x.$$

Givet en ekvation $f(x)=0$ och erhållna rötter x_1 och x_2. Vi belyser tre fall.

I $f(x)=0 \Longrightarrow \begin{cases} x=x_1 \\ x=x_2 \end{cases}.$
Implikationen " $\Longrightarrow$ " garanterar att eventuella rötter till $f(x)=0$ är $x=x_1$ och $x=x_2$. Eventuellt kan någon eller båda vara falska.

II $f(x)=0 \Longleftarrow \begin{cases} x=x_1 \\ x=x_2 \end{cases}.$
Implikationen " $\Longleftarrow$ " garanterar att $x=x_1$ och $x=x_2$ är riktiga rötter. Eventuellt finns fler.

III $f(x)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x=x_1 \\ x=x_2 \end{cases}.$
Ekvivalensen " $\Longleftrightarrow$ " garanterar att båda rötterna $x=x_1$ och $x=x_2$ är riktiga rötter och det finns inga fler.

I exempel 1.61 får vi *minst* en falsk rot p.g.a. att vi enbart har " $\Longrightarrow$ ". Detta exemplifierar I ovan.

Exempel 1.63 Lös ekvationen $(x+1)(x^2-3x-1)=x^2-1$.

Lösning

Vi ser att HL kan faktoriseras som $(x-1)(x+1)$. Vi får alltså

$$(x+1)(x^2-3x-1)=(x-1)(x+1).$$

Om vi förkortar den gemensamma faktorn $x + 1$ från båda led, får vi

$$x^2 - 3x - 1 = x - 1 \Longleftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} .$$

Genom förkortningen "strykningen" av den gemensamma faktorn $x+1$ tappar vi roten som ges av $x + 1 = 0$, d.v.s. $x = -1$. Hur förklaras detta? Jo, förkortningen är detsamma som division med $x + 1$. För $x + 1 = 0$ kan inte denna division utföras eftersom man inte får dividera med 0. Därför måste även ekvationen $x + 1 = 0$ lösas, d.v.s. vi får även roten $x = -1$.
Detta är ett exempel på fall II, ty vi kan inte komma *från*

$$(x + 1)(x^2 - 3x - 1) = (x - 1)(x + 1) \textit{till}\ x^2 - 3x - 1 = x + 1$$

eftersom det kräver en division med $x+1$, som kan vara lika med noll. Däremot kommer vi *från*

$$x^2 - 3x - 1 = x - 1 \textit{till}\ (x + 1)(x^2 - 3x - 1) = (x - 1)(x + 1)$$

genom att multiplicera med $x + 1$ i båda led. Sammantaget har vi endast implikationen

$$(x + 1)(x^2 - 3x - 1) = (x - 1)(x + 1) \Longleftarrow x^2 - 3x - 1 = x - 1.$$

Vi observerar också, att $x^2 - 3x - 1 = x - 1$ ger rötterna $x = 0$ och $x = 3$ som garanterat är riktiga rötter till den ursprungliga ekvationen p.g.a. denna implikation.

■

1.4.8 Logik och Pythagoras sats

Sats 1.4 Om a och b är kateter och c hypotenusa i en triangel så är

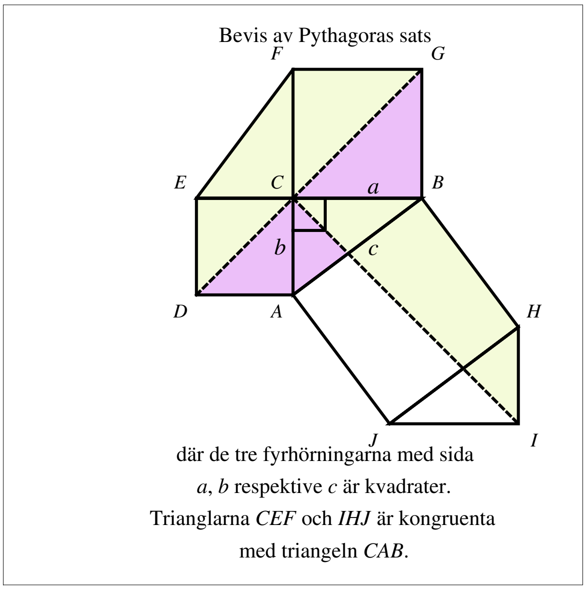
$$a^2 + b^2 = c^2 . \qquad (1.23)$$

Kommentarer

- Vi observerar att satsen är en implikation:

$$a \perp b \Longrightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

- Även omvändningen gäller. Den används för att konstruera vinkelräta hörn.
- Ett elegant bevis gjordes av Leonardo da Vinci, se figur!



Bevis av Pythagoras sats, enligt Leonardo Da Vinci

(i) Fyrhörningen $DABG$ är kongruent med de tre tetragonerna $DEFG$, $CAJI$ och $CBHI$.

(ii) Därmed har hexagonerna $DABGFE$ och $CAJIHB$ samma area.

(iii) Trianglarna CEF, CAB och IHJ är kongruenta och haralltså samma area.

(iv) Ta bort trianglarna CEF och CAB från den första hexagonen och ta bort trianglarna IHJ och CAB från den andra hexagonen.

(v) Det som återstår av den första hexagonen är kvadraterna $CFGB$, med area a^2 $ADEC$, med area b^2.
och det som återstår från den andra hexagonen är kvadraten $JABH$ med area c^2. Detta visar att $a^2 + b^2 = c^2$.

Övningar

1.38 Givet trianglar med sidolängder nedan. Avgör om trianglarna är vinkelräta.

	a	b	c
(a)	5	12	13
(b)	20	21	29
(c)	7	24	26

1.39 Visa att med

$$a = x^2 - y^2,\ b = 2xy \text{ och } c = x^2 + y^2$$

är $a^2 + b^2 = c^2$.

1.5 Rationellt uttryck

Exempel 1.64 En kvot mellan två polynom såsom

$$\frac{t^2+1}{3t-4} \text{ eller } \frac{2\,x^3 - x^2 - 6\,x + 14}{x^2 + x - 2}$$

benämner vi *rationellt* uttryck.

■

Rent allmänt är ett rationellt uttryck r en kvot av två polynom, d.v.s.

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \tag{1.24}$$

där $p(x)$ och $q(x) \neq 0$ är polynom. uttrycket är giltigt (eller definierat) för de x sådana att $q(x) \neq 0$, dvs för (definitions-)mängden $\{x : q(x) \neq 0\}$

Exempel 1.65 Betrakta de rationella uttrycken

$$\text{a)}\ \frac{3+x}{x} \quad \text{b)}\ \frac{1}{2x+1} \quad \text{c)}\ \frac{x^2 - x - 3}{x^2 + x}$$

Vi vet sedan tidigare att man inte för dividera med talet 0. Vi skall nu undersöka för vilka x som dessa är giltiga/definierade.

a) $\dfrac{3+x}{x}$ har *nämnarpolynomet* x som alltså inte får vara $= 0$. För alla andra värden på x är uttrycket definierat.
a) Svar: Uttrycket är definierat för $x \neq 0$.

b) nämnarpolynomet är $2x + 1$ och dess nollställe ges av ekvationen $2x + 1 = 0$ d.v.s. $x = -\dfrac{1}{2}$.
b) Svar: Uttrycket är definierat för $x \neq -\dfrac{1}{2}$.

c) nämnarpolynomet är $x^2 + x = x(x + 1)$ som är $= 0$ precis då $x = 0$ eller $x = -1$.
c) Svar: Uttrycket är definierat för $x \neq 0$ eller $x \neq -1$.

■

Eftersom man i ett rationellt uttryck kan välja nämnarpolynomet konstant är polynom specialfall av rationella uttryck.

Om man har en summa mellan två bråk (rationella uttryck) i variabeln x kan dessa skrivas på minsta gemensamma nämnare MGN, jämför med sidan 12. Att "skriva om", handlar återigen om identiteter (och inte om ekvationer).

Exempel 1.66
$\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{x}$ har $x(x+1)$ som MGN. således förlänger vi den första termen med x och den andra med $x+1$.

$$\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x} = \frac{2}{x+1}\cdot\frac{x}{x} - \frac{3}{x}\cdot\frac{x+1}{x+1} = \frac{2x-3(x+1)}{x(x+1)} = \frac{-x-3}{x(x+1)} = -\frac{x+3}{x^2+x}$$

■

Exempel 1.67 I det föregående exemplet finns ingen gemensam faktor för de två nämnarna x och $x+1$. därför blir den minsta gemensamma nämnaren just produkten av de två nämnarna. Här nedan skriver vi ihop två termer på MGN.

$$\frac{5x-2}{x^2+x} + \frac{1}{x^2-3x} = \frac{5x-2}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x-3)}$$

Tydligen är den minst gemensamma nämnaren MGN $= x(x+1)(x-3)$. Man tar således med faktorn x endast en gång eftersom den redan finns i de båda nämnarna! Fortsättningen blir nu

$$\frac{5x-2}{x(x+1)}\cdot\frac{x-3}{x-3} + \frac{1}{x(x-3)}\cdot\frac{x+1}{x+1} = \ldots = \frac{(5x-2)(x-3)+1\cdot(x+1)}{x(x-3)(x+1)}$$

Förenklas nu täljaren erhålls

$$\frac{5\,x^2-16\,x+7}{x(x-3)(x+1)}\,.$$

Kan ytterligare förenkling göras? Det är detsamma som att fråga sig om nåot av nämnarens nollställen är nollställen till täljaren. Enligt Faktorsatsen (1.22) sidan 30 är det detsamma som att täljaren $= 0$, om $x=0$, $x=3$ eller $x=-1$. Prövning ger att täljaren $\neq 0$ för dessa x, varför svaret ovan är fullständigt förenklat.

■

Övningar

1.40 Skriv följande rationella uttryck på MGN.

a) $\dfrac{2-x}{x+1}+\dfrac{3}{x}$ b) $\dfrac{3}{t^2-1}+\dfrac{t+1}{t^2-t}$

c) $\dfrac{3-t}{t^2}+2\cdot\dfrac{5}{t^2+3t}$ d) $\dfrac{1-t}{3t}+\dfrac{t^2-2}{t^2+t}$

1.5.1 Utveckling av rationellt uttryck

Med *utveckling av ett uttryck* menas att det delas upp i termer av enklare slag. Vi använder oss av en metod med två steg, *polynomdivision och partialbråksuppdelning.*
Om i ett rationellt uttryck (rationell funktion) nämnarens grad $\leq$ täljarens grad, så kan man göra en *polynomdivision.*
Den går till som en vanlig division med trappa eller liggande stol.

Exempel 1.68 beräkna/utför divisionen $\dfrac{2\,x^3-x^2-6\,x+14}{x^2+x-2}$.

Lösning

Vi observerar att grad täljare$=3\geq$ grad nämnare$=2$, alltså är polynomdivision möjlig.

$2x-3$ (*kvot*)		$\leftrightarrow$
$2\,x^3-x^2-6\,x+14$	x^2+x-2	täljare/nämnare
$-(2x^3+2x^2-4x)$		Produkten $2x\cdot(x^2+x-2)$
$-3x^2-2x+14$		Subtraktion av de båda leden
$-(-3x^2-3x+6)$		Produkten $-3\cdot(x^2+x-2)$
$x+8$ (*restterm*)		Subtraktion av de båda leden

Eftersom gradtalet på resttermen $x+8$ är $=1$, d.v.s. lägre än nämnarens gradtal ($=2$) stoppar algoritmen vid detta steg och $x+8$ är *restterm.* Divisionen innebär att

$$\frac{2\,x^3-x^2-6\,x+14}{x^2+x-2}=2x-3+\frac{x+8}{x^2+x-2}$$

■

Om däremot nämnarens gradtal är $>$ täljarens, (som är fallet med en eventuell restterm efter polynomdivision) kan man göra en *partialbråksuppdelning (PBU)* (eller *uppdelning i partialbråk*)[5] . Följande exempel, vilken är en fortsättning av det förra, belyser vad detta innebär:

PBU då nämnaren kan faktoriseras i (reella) förstagradspolynom.

EXEMPEL 1.69 Skriv differenserna av de två bråken på gemensamt bråkstreck:

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2}$$

Lösning:

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2} = \frac{3(x+2)}{(x-1)(x+2)} - \frac{2(x-1)}{(x+2)(x-1)} =$$

$$= \frac{3x+6-(2x-2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x+8}{(x-1)(x+2)}$$

Att vända på problemet och dela upp det sista uttrycket i de två ursprungliga termerna kallas PBU. Man gör då en *ansättning:*

$$\frac{x+8}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

där A och B är konstanter, vilka nu skall bestämmas. Genom att göra liknämnigt erhålls likheterna

$$\frac{x+8}{(x-1)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

För att likhet skall gälla, så måste täljarna var lika d.v.s.

$$x+8 = (A+B)x + 2A - B$$

För att likheten skall gälla för alla x (i definitionsmängden), så måste respektive koefficienter vara lika.

$$\begin{array}{rlcl} & \text{VL} & & \text{HL} \\ x: & 1 & = & A+B \\ 1: & 8 & = & 2A-B \end{array}$$

Det så uppkomna *ekvationssystemet* har lösningen $A = 3$ och $B = -2$, vilket ju stämmer med det ursprungliga uttrycket (sista termen i det sista ledet i exempel 1.68). Tillsammans med resultatet i detta exempel, har vi att

$$\frac{2\,x^3 - x^2 - 6\,x + 14}{x^2 + x - 2} = 2x - 3 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2}$$

---

[5] En exakt definition av ett partialbråk, är ett rationellt uttryck med grad tälj<grad nämn. Med PBU utvecklar man ett rationellt uttryck i en summa av partialbråk av enklast möjliga form.

■

EXEMPEL 1.70 Vi partialbråksuppdelar nu $\frac{x-3}{x^2-x}$.
täljaren är av grad 1 emedan nämnaren är av grad 2 och därmed av högre grad. Detta är en förutsättning för att kunna partialbråksuppdela. Vi börjar med att faktorisera nämnaren. $x^2 - x = x(x-1)$ och ansätter alltså

$$\frac{x-3}{x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \{\text{MGN}\} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}$$

jämför vi nu första och sista leds täljare (nämnarna är ju lika.) får vi $x - 3 = A(x-1) + Bx = Ax - A + Bx = (A+B)x - A$ och därefter jämför de olika ledens koefficienter får vi

$$\begin{array}{llcl} & \text{VL} & & \text{HL} \\ x: & 1 & = & A+B \\ 1: & -3 & = & -A \end{array}$$

Av detta ser vi att $A = 3$ och $B = 1 - A = 1 - 3 = -2$. alltså är

$$\frac{x-3}{x^2-x} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x-1}$$

De två erhållna termerna kallas partialbråk.

■

PBU då en faktor av grad 2 i nämnaren inte kan faktoriseras i (reella) förstagradspolynom.

EXEMPEL 1.71 partialbråksuppdela det rationella uttrycket $\frac{x-6}{x^3+2x}$.

Lösning

Eftersom nämnaren endast kan faktoriseras till $x(x^2+2)$ kommer ansättningen vid PBU att se lite annorlunda ut:

$$\frac{x-6}{x^3+2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

d.v.s. man ansätter med ett förstagradspolynom $Bx + C$ med nämnare $x^2 + 2$. Liknämnigt ger att

$$\begin{array}{llcl} & \text{VL} & & \text{HL} \\ x^2: & 0 & = & A+B \\ x: & 1 & = & C \\ 1: & -6 & = & 2A \end{array} \qquad \text{d.v.s. } \frac{x-6}{x^3+2x} = -\frac{3}{x} + \frac{3x+1}{x^2+2}$$

■

Definition 1.2 Vi inför följande begrepp: Ett rationellt uttryck/funktion säges vara **utvecklat** efter det att man utfört polynomdivision (om grad tälj $\geq$ grad nämn) och utfört PBU.

PBU då ett nollställe till nämnaren är en (reell) dubbelrot.

Exempel 1.72 Utveckla $\dfrac{3\,x^3+4\,x-1}{x^3+2\,x^2+x}$,

Lösning

Vi utför först en polynomdivision.

$$\begin{array}{rl}
3 & \leftarrow \text{kvot} \\
\hline
3\,x^3+4\,x-1 & |\underline{x^3+2\,x^2+x} \\
-(3x^3+6x^2+3x) & \\
\hline
0-6x^2+x-1 & \leftarrow \text{restterm}
\end{array}$$

Nu återstår att partialbråksuppdela $\dfrac{-6x^2+x-1}{x^3+2x^2+x}$.
nämnaren kan faktoriseras som $x(x^2+2x+1)=x(x+1)^2$, d.v.s. nämnaren har ett *dubbelt*[6] nollställe $x=-1$. Ansättningen kommer nu att se lite annorlunda ut jämfört med de två tidigare exemplena:

$$\frac{-6x^2+x-1}{x^3+2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

även här gör vi liknämnigt i HL och erhåller

$$\frac{-6x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

$$\begin{array}{llcl}
 & \text{VL} & & \text{HL} \\
x^2: & -6 & = & A+B \\
x: & 1 & = & 2A+B+C \\
1: & -1 & = & A
\end{array}$$

Ekvationssystemet ger $A=-1$, $B+C=3$ samt $-6=-1+B$. Således är $B=-5$ och därmed $C=8$. Resultatet av våra ansträngningar ger nu att

$$\frac{3\,x^3+4\,x-1}{x^3+2\,x^2+x}=3-\frac{1}{x}-\frac{5}{x+1}+\frac{8}{(x+1)^2}$$

[6]Med detta menas att (nämnar-)polynomet innehåller faktorn $(x-1)^2$.

■

EXEMPEL 1.73 I exempel 1.68 ser vi att kvoten är ett polynom av grad 1 =täljarens grad minus nämnarens grad. Vi kan i stället för polynomdivision, använda ansättning även här. Ansätnningen görs som i exemplena 1.68 och 1.69 tillsammans.

$$\frac{2\,x^3 - x^2 - 6\,x + 14}{x^2 + x - 2} = Cx + D + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}.$$

Innan vi sätter vi HL på MGN, ser vi att $C = 2$, kvoten mellan täljarens och nämnarens högstagradskoefficienter. Alltså

$$\begin{aligned} \frac{2\,x^3 - x^2 - 6\,x + 14}{x^2 + x - 2} &= 2x + D + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \iff \\ 2\,x^3 - x^2 - 6\,x + 14 &= 2x^3 + (2+D)x^2 + (A+B+D-4)x + 2A - B - 2D. \end{aligned}$$

Detta ger ett ekvationssystem

$$\begin{cases} x^2: & -1 = 2 + D \\ x^1: & -6 = A + B + D - 4 \\ x^0: & 14 = 2A - B - 2D \end{cases} \iff \begin{cases} A = 3 \\ B = -2 \\ D = -3 \end{cases}$$

d.v.s. med samma koeffcienter som innan. Vi får alltså samma utveckling

$$\frac{2\,x^3 - x^2 - 6\,x + 14}{x^2 + x - 2} = 2x - 3 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2}.$$

■

Övningar

1.41 Utför polynomdivision av följande rationella uttryck

a) $\dfrac{x^3 + 2x - 1}{x}$ b) $\dfrac{2x}{x+1}$ c) $\dfrac{6x - 1}{2x - 1}$

d) $\dfrac{x^2}{2x+1}$ e) $\dfrac{x^3 + 2x - 1}{x+1}$ f) $\dfrac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + 1}$

1.42 partialbråksuppdela följande rationella uttryck

a) $\dfrac{2}{x^2 + x}$ b) $\dfrac{2}{x^2 - 1}$ c) $\dfrac{3x + 1}{x^2 - 4x}$

1.43 Utveckla följande rationella uttryck

a) $\dfrac{3x+1}{x^2-x}$ b) $\dfrac{3x+1}{x^3-x}$ c) $\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}$

d) $\dfrac{2x^3-9x+2}{x^3-4x}$ e) $\dfrac{3x+1}{(x+1)^2}$ f) $\dfrac{5x^3-3x^2+6x-16}{x^4-8x}$

1.5.2 Ekvationer med rationella uttryck

EXEMPEL 1.74 För att lösa ekvationen $\dfrac{2}{x}=3$ kan vi helt enkelt invertera båda led, $\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{3}$ och därefter multiplicera med 2 i båda led, $x=\dfrac{2}{3}$.
En annan möjlighet att komma åt x är att multiplicera med x och dividera med 2 i båda led[7].

■

EXEMPEL 1.75 Betrakta det rationella uttrycket $\dfrac{3x+1}{2x}$. Genom termvis division (polynomdivision) erhålls

$$\frac{3x+1}{2x}=\frac{3x}{2x}+\frac{1}{2x}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2x}.$$

Men för att lösa ekvationen $\dfrac{3x+1}{2x}=0$ gör vi ingen termis division.
Ekvationen $=0$ precis då *täljaren* $=0$ emedan *nämnaren inte får vara* $=0$, vilket här betyder att $x\neq 0$. Lösningen ges alltså av ekvationen $3x+1=0$ d.v.s. $3x=-1$, $x=-\dfrac{1}{3}$.
Alternativt kan vi lösa ekvationen m.h.a. den termvisa division vi gjorde.

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{2x}=0\iff-\frac{3}{2}=\frac{1}{2x}\iff-\frac{2}{3}=\frac{2x}{1}\iff x=-\frac{1}{3}$$

■

EXEMPEL 1.76 på liknande sätt som i det förra exemplet skall vi försöka lösa ekvationen $\dfrac{2x-3}{x+1}=0$. För det första är uttrycket definierat för alla $x\neq-1$,

[7] Vi borde redan från början iakttagit att uttrycket inte är definierat för $x=0$.

eftersom det är precis detta x som gör att nämnaren $= 0$. Lösningen ges alltså av de/det x som gör att täljaren $= 0$ förutsatt att nämnaren $\neq 0$, d.v.s. $x \neq -1$. Lösningen ges alltså av $2x - 3 = 0, \quad x = \frac{3}{2}$.

■

Exempel 1.77 Lös ekvationen $\frac{2-x}{3x+1} = 4$.
Vi går nu igenom de viktiga lösningsstegen.
Det är lämpligt att flytta VL:s nämnare till HL:s täljare[8].

$$\frac{2-x}{3x+1} = 4 \cdot \frac{3x+1}{3x+1} \Longleftrightarrow \frac{2-x-4(3x+1)}{3x+1} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \text{täljaren} & = -2-13x = 0 \\ \text{nämnaren} & = 3x+1 \neq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = -\frac{2}{13} \wedge x \neq -\frac{1}{3}.$$

Svar: $x = -\frac{2}{13}$.

■

Kommentarer

- Att ett rationellt uttryck $= 0$ är detsamma som (ekvivalent med) att täljaren $= 0$ under förutsättning att nämnaren $\neq 0$.

Exempel 1.78 Lös ekvationen $\frac{1}{3+x} - 2 = 0$.

Lösning

Först iakttar vi att nämnaren $= 0$ precis då $x = -3$. Just detta x är uttrycktet inte definierat för och alltså kan detta $x = -3$ *inte* vara rot till ekvationen. Vi kan exempelvis börja med att flytta över -2 till HL.

$$\frac{1}{3+x} = 2 \Longrightarrow 1 = 2(3+x) \Longleftrightarrow \frac{1}{2} = 3+x \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

Svar: $x = -\frac{5}{2}$, som är en riktig rot, eftersom den är $\neq -3$.

Alternativt kan vi skriva VL $\frac{1}{3+x} - 2$ på gemensamt bråkstreck.

$$\frac{1}{3+x} - 2 = \frac{1}{3+x} - \frac{2(3+x)}{3+x} = \frac{1-6-2x}{3+x} = \frac{-5-2x}{3+x} = 0$$

[8]Uttryck såsom $\frac{ax+b}{cx+d}$ kallas brutna linjära avbildningar.

Lösningen ges av att täljaren $= 0$ och nämnaren $\neq 0$, d.v.s. $x \neq -3$.
Täljaren: $-5 - 2x = 0$, vilket ger samma rot som tidigare.

■

Exempel 1.79 Lös ekvationen $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-4} = \dfrac{5}{4}$.

Lösning

Vi skriver VL på gemensamt bråkstreck med MGN, som är $(x-1)(x-4)$. Vi förlänger således första term med $(x-4)$ och andra term med $(x-1)$, d.v.s.

$$\frac{1}{x-1} \cdot \frac{x-4}{x-4} + \frac{1}{x-4} \cdot \frac{x-1}{x-1} = \frac{1 \cdot (x-4) + 1 \cdot (x-1)}{(x-4)(x-1)} = \frac{2x-5}{(x-4)(x-1)}\,.$$

Vi löser nu ekvationen med denna omskrivning av VL.

$$\frac{2x-5}{(x-4)(x-1)} = \frac{5}{4} \Longrightarrow 4(2x-5) = 5(x-4)(x-1).$$

Observera, att vi inte har ekvivalens eftersom ” $\Longleftarrow$ ” inte fungerar för $x = 1$ och $x = 4$. Utveckling av båda led ger

$$8x - 20 = 20 - 25\,x + 5\,x^2 \Longleftrightarrow 5x^2 - 33x + 40 = 0 \Longleftrightarrow x^2 - \frac{33x}{5} + 8 = 0\,.$$

Denna ekvation går att lösa med p, q-formeln.

$$x = \frac{33}{10} \pm \sqrt{\frac{1089}{100} - \frac{800}{100}} = \frac{33}{10} \pm \frac{17}{10} = \frac{33 \pm 17}{10}$$

Vi erhåller två riktiga rötter $x = 5$ eller $x = \dfrac{16}{10} = \dfrac{8}{5}$, eftersom dessa inte är lika med varken 1 eller 4. (svar).

■

Exempel 1.80 Betrakta en rak cirkulär cylinder (en rund burk) med radie r och höjd h. Dess area ges av

$$A = \text{topp} + \text{botten- area} + \text{mantelytans area} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$$

Dess volym ges av $V = \pi r^2 \cdot h$. både arean A och volymen V beror på två *variabler*, r och h.

(a) Antag till att börja med att vi vill ha en burk som rymmer 1 liter (= 1 dm^3). Vi kan då eliminera en av variablerna ex.vis h genom att $V = 1 = \pi r^2 h$ varför $\dfrac{1}{\pi r^2} = h$.
Insatt i arean erhåller vi

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2}{r} = \{\text{MGN}\} = \frac{2(\pi r^3 + 1)}{r}$$

Detta är ett rationellt uttryck i r. Om radien är $r = 1$ (dm) erhåller vi en area

$$A = \ldots = \frac{2(\pi \cdot 1^3 + 1)}{1} = 2(\pi + 1)\ (\text{dm}^2).$$

(b) Givet att volymen är 1 dm^3, som i (a). Vilken/vilka radier (och höjder) skall cylindern ha, om dess area är $A = 6$ dm^2?

Lösning

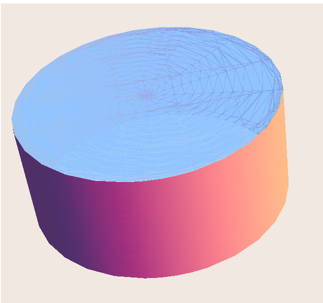
Vi har då att lösa ekvationen

$$\frac{2(\pi r^3 + 1)}{r} = 6 \Longleftrightarrow 2(\pi r^3 + 1) - 6r = 0 \Longleftrightarrow \pi r^3 + 1 - 3r = 0$$

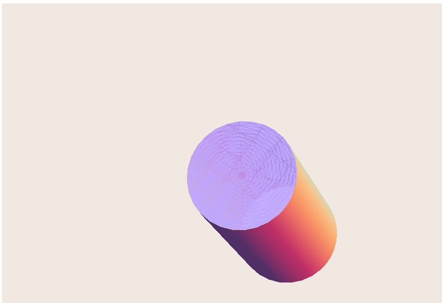
Detta är en tredjegradsekvation. så långt kan vi konstatera att vi enbart kan acceptera rötter $r > 0$ av rent praktiska skäl. En numerisk (approximativ lösning) ger vid handen att $r = 0.713\ldots$ eller $r = 0.4007\ldots$. Det finns alltså två lösningar. Det finns dessutom en tredje rot $r \approx -1.11$ men denna rot kan alltså inte komma i fråga. Motsvarande höjder är

$$\frac{1}{\pi r_1^2} = h_1 = 0.625869\ldots \text{ och } \frac{1}{\pi r_2^2} = h_2 = 1.98236\ldots$$

Sammanfattningsvis kan vi konstatera att vi för två rötter/lösningar och alltså finns två former på cylindrar, som uppfyller villkoren med volym 1 dm^3 och area 6 dm^2.



$r_1 = 0.625869\ldots$, $h_1 = 0.625869\ldots$



$r_2 = 0.4007130\ldots$, $h_2 = 1.98236\ldots$

■

EXEMPEL 1.81 Om man skriver ihop ett antal termer på gemensamt bråkstreck strävar man mot att få denna så liten som möjlig. Man skriver termerna på minsta gemensamma nämnare (MGN).

$$\frac{6}{x^2+x} - \frac{2x-1}{x^2-1} = \frac{6}{x(x+1)} - \frac{2x-1}{(x-1)(x+1)}$$

MGN $= (x-1)(x+1)x$. Den första termen skall alltså förlängas med $x-1$ och den andra termen skall förlängas med x. Vi för då (Observera att vi har fortsatt likhet).

$$\frac{6}{x(x+1)} - \frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{6(x-1)-(2x-1)x}{x(x+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{7x-1-2x^2}{x(x+1)(x-1)}$$

■

EXEMPEL 1.82 För att lösa mer komplicerade ekvationer med rationella uttryck såsom

$$\frac{6}{x^2+x} = \frac{2x-1}{x^2-1}$$

iakttar vi först att $x \neq 0$ och $x \neq \pm 1$. därefter flyttar vi över samtliga termer till samma sida så att vi får

$$\frac{6}{x^2+x} - \frac{2x-1}{x^2-1} = 0$$

därefter följer samma omskrivning som i exempel 1.81.

$$\frac{7x-6-2x^2}{x(x-1)(x+1)} = 0$$

täljarens nollställen ges av ekvationen $7x-6-2x^2 = 0$.
Med "p-q" formeln får vi $x = \frac{3}{2}$ och $x = 2$. Ingendera av dessa är $x = 0$ eller± 1 så de utgör rötterna till den ursprungliga ekvationen.

■

Exempel 1.83
Lös evaktionen

$$\frac{2}{x-1} = \frac{1+3\,x}{x^2-1} - \frac{x^2+3}{x+1}$$

Lösning

Vi använder samma teknik som i föregående exempel och börjar med att flytta över termerna till ex.vis HL och skriver uttrycken på MGN (Minsta Gemensamma nämnare) x^2-1:

$$\frac{1+3\,x}{x^2-1} - \frac{x^2+3}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{2-2\,x+x^2-x^3}{x^2-1} = 0$$

Rötterna till denna ekvation är de x sådana att täljaren $= 0$ men nämnaren $\neq 0$. De tal som ej kan ingå i lösningen är $x = \pm 1$. Vi ser genom prövning att täljaren $= 0$ för $x = 1$. således är $x-1$ faktor till täljaren. Polynomdivision ger nu att täljaren är

$$2-2\,x+x^2-x^3 = (1-x)(x^2+2)$$

Eftersom $x^2+2 > 0$ för alla x saknar den ursprungliga ekvationen lösning.

■

Vi sammanfattar nu ekvationer med rationella uttryck.

1. För mer komplicerade ekvationer flyttas samtliga termer över till endera sidan, så att andra sidan $= 0$. (I exempel 1.79 görs inte detta men däremot i exempel 1.82.)
2. Termerna "slås samman" genom att skriva dem på minsta gemensamma nämnare, MGN. Man har alltså en ekvation på formen $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$, där $p(x)$ och $q(x)$ är polynom samt $q(x) = $ MGN.
3. Rötterna/lösningarna till den ekvation ges av de x sådana att
   - **a)** täljaren $p(x) = 0$ men
   - **b)** nämnaren $q(x) \neq 0$ (se kommentar på sidan 49).

Övningar

1.44 Lös ekvationerna

a) $\dfrac{2}{x}+1=0$ b) $\dfrac{1}{x+1}=2$ c) $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$

d) $\dfrac{2}{x}-x=0$ e) $\dfrac{x+1}{x}=3$ f) $\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}$

1.45 Lös ekvationerna

a) $\dfrac{1+2\,x}{x-3}=1$ b) $\dfrac{\pi\,x}{3\,x-2}+3=0$ c) $\dfrac{1-x}{1+x}=2$

d) $\dfrac{x-1}{1+3\,x}-1=0$ e) $\dfrac{x^2-1}{x^2+2}=\dfrac{2}{3}$ f) $1=\dfrac{\frac{1}{x}-1}{2+\frac{2}{x}}$

1.46 Lös ekvationerna

a) $\dfrac{1}{2x+1}=x$ b) $\dfrac{3x+2}{x}=2x$ c) $2x-3=\dfrac{2}{x}$

d) $\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{4x}{x+1}$ e) $\dfrac{5x-1}{x^2+3x}=\dfrac{x-1}{x^2-x}$ f) $\dfrac{x^2-x}{x^3-1}+1=0$

1.47 Lös ekvationerna

a) $\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1-x+x^2}$ b) $1=\dfrac{2\,x^2+3\,x+1}{3\,x^2+2\,x-1}$

c) $\dfrac{4\,x}{1+x}=\dfrac{1}{x+x^2}$ d) $\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{1}{(x-3)\,(x+2)}+$
$+\dfrac{1}{x^2-4}=0$

1.48 Lös ekvationen

$$\frac{b}{x}+\frac{3+x}{x-1}+\frac{2\,x-6}{x^2-x}=0$$

för olika konstanter b

1.49 Lös ekvationen x; $\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{b-a}{x^2-ab}$, där a och b är två olika konstanter skilda från noll.

1.5.3 Polynom av grad 3 och högre

Exempel 1.84 Ett tredjegradspolynom är ex.vis: $f(x)=x^3+x-2$.
För att lösa ekvationen $f(x)=0$ finns det en formel liknande (1.21) sidan 29 (Se sidan 59.). Den är krånglig, så i detta fall gissar och serl att $x=1$ är en rot. Faktorsatsen ger nu att $(x-1)$ är faktor till $f(x)$. Man kan nu utföra en polynomdivision som måste gå *jämnt upp* (faktorsatsen). Vi skall alltså beräkna, d.v.s. utföra divisionen

$$\frac{x^3+x-2}{x-1},$$

(liksom på sidan 43 avsnitt 1.5.1), som blir ett polynom av grad 2, d.v.s.

$$\frac{x^3+x-2}{x-1} = ax^2+bx+c \text{ eller ekvivalent } x^3+x-2 = (x-1)(ax^2+bx+c).$$

Divisionen går alltså jämnt upp, så att i stället för en liggande stol utnyttjar vi att den sista likheten är en identitet. Det betyder att koefficienterna i VL och HL är lika.

$$\begin{array}{rrcl} & \text{VL} & & \text{HL} \\ \hline x^3: & 1 & = & a \\ x^2: & 0 & = & -a+b \\ x^1: & 1 & = & -b+c \\ x^0: & -2 & = & -c \end{array} \iff \begin{cases} a=1, \\ b=1, \\ c=2. \end{cases}$$

Vi sluter oss till att polynomdivisionen är

$$\frac{x^3+x-2}{x-1} = x^2+x+2 \text{ eller } f(x) = x^3+x-2 = (x-1)(x^2+x+2).$$

För att lösa ekvationen $f(x)=0$ återstår att lösa $x^2+x+2=0$. $p,q-$formeln ger

$$x^2+x+2=0 \iff x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{1}{4}-2}_{<0}}.$$

Således finns inte fler (reella) rötter än $x=1$.
Svar: $f(x)=0$ har roten $x=1$.

■

Exempel 1.85 Vi erinrar oss att ett rationellt tal är ett tal som kan skrivas $\frac{m}{n}$, där m och n är heltal. således är $\frac{8}{7}$ ett rationellt tal. Ett annat sätt att karakterisera ett rationellt tal är att dess decimalutveckling är *periodisk*.
$\frac{8}{7} = 1.142857142857142857142857\ldots$. Perioden är 142857. De flesta heltalsrötter såsom $\sqrt{2}$ och $\sqrt{3}$ är inte rationella tal. Sådana tal kallas *irrationella* tal.

■

Exempel 1.86 Polynomet $2x^2+x-6$ kan faktoriseras via (1.21). nollställena är $x=-2$ och $x=\frac{3}{2}$, varför $2x^2+x-6=(2x+3)(x-2)$.
Vi ser då att nollstället $x=\frac{3}{2}$ "avspeglar sig" i VL:s 2:a framför x^2, som alltså

ger nollställets nämnare.
P.s.s. är täljaren $(-)3$ en faktor i nolltegradskoefficienten -6.
Vidare är det andra nollstället $x = 2$ en faktor till nolltegradskoefficienten -6.

■

EXEMPEL 1.87 Polynomet $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 13x - 5$ är ett tredjegradspolynom. Dess *koefficienter* är 2, -5, -13 och -5, d.v.s. heltal.
Man säger då att $f(x)$ har *heltalskoefficienter*.
Om polynomekvationen $f(x) = 0$ har en rationell rot $x = s/t$ förkortat så långt som möjligt, där s och t är heltal, kan man visa[9] att s måste vara divisor till den sista termen -5 och t måste vara divisor till högstagradskoefficienten 2.
Detta innebär alltså att

$$s = \pm 1, \pm 5 \text{ och } t = \pm 1, \pm 2, \text{ d.v.s. } x = \pm\frac{1}{1}, \pm\frac{5}{1}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}$$

Genom insättning av dessa åtta kandidater visar sig $x = -1/2$ vara en rot.
För att få fram eventuella andra rötter utnyttjar vi faktorsatsen. Vi vet att $(2x + 1)$ är faktor till $f(x)$, varför divisionen

$$\frac{f(x)}{2x+1} = \frac{2x^3 - 5x^2 - 13x - 5}{2x+1}$$

går jämnt upp. Kvoten visar sig bli $x^2 - 3x - 5$.
Genom att lösa ekvationen $x^2 - 3x - 5 = 0$ erhåller vi samtliga rötter till ekvationen $f(x) = 0$.
Dessa är alltså $x = -1/2$, $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$. Samtidigt erhåller vi faktoriseringen av $f(x)$:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 13x - 5 = (2x + 1)\left(x - \frac{3 + \sqrt{29}}{2}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{29}}{2}\right)$$

■

EXEMPEL 1.88 Polynomet $3x^3 + 4x + 1$ eventuella rationella nollställen har som täljare ± 1 och som nämnare $\pm 1, \pm 3$. nollställena skulle i så fall vara $x, \pm 1, \quad x = \pm\dfrac{1}{3}$. insättning i polynomet (gör det som övning) $3x^3 + 4x + 1$

[9] Detta bevisas inte här.

visar sig att inget av dessa x är nollställe. Vi kan då dra slutsatsen att polynomet saknar rationella nollställen. D.v.s. samtliga (högst tre) nollställen måste vara irrationella. Numeriskt kan dessa tas fram. Det visar sig att det endast finns ett (reellt) nollställe som är $x \approx -0.239674$.

■

Exempel 1.89 Polynomet $x^2 - x - 1$ har heltalskofficienter men däremot inte $x^2 - x\sqrt{2} - 1$. Det förra polynomets nollställen är dock inte rationella.

■

Exempel 1.90 I polynomekvationen $\frac{x^4}{3} - 2x^2 = 1$ kan man förlänga båda led med 3 och erhålla $x^4 - 6x^2 - 3 = 0$. Polynomet i VL har nu enbart heltalskoefficienter. Eventuella rationella rötter är alltså $x = \pm 1/1, \quad \pm 3/1$. Ekvationen gör i detta fall att lösa direkt genom att sätta $x^2 = t$ och därmed $x^4 = t^2$.

$$t^2 - 6t - 3 = 0 \Longleftrightarrow t = 3 \pm \sqrt{9+3} = 3 \pm 2\sqrt{3}$$

Eftersom $t = x^2$ kan vi bar acceptera $t = 3 + 2\sqrt{3}$. Rötterna är alltså $x = \pm\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$ som alltså inte är rationella.

■

Exempel 1.91 Polynomekvationens $x^2 - 2 = 0$ eventuella rationella rötter är $x = \pm, 2 \pm 1$. Eftersom inga av dessa är rötter måste ekvationens rötter vara irrationella. Nu är

$$x^2 - 2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 2 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Av satsen om rationella rötter följer att $\sqrt{2}$ är irrationellt.

■

ovanstående exempel visar därmed hur man kan få fram eventuella rationella rötter under förutsättning att polynomet har heltalskoefficienter. Denna sats kallas ”Satsen om rationella rötter” och

Sats 1.5 (**Satsen om rationella rötter**) Om i polynomet (1.20) samtliga koefficienter $a_0, \ldots, a_n$ är heltal och om polynomet har ett rationellt nollställe $x = \frac{s}{t}$, förkortat så långt som möjligt, så är s en divisor till a_0 och t en divisor till a_n.

Bevis: Vi avstår från ett bevis.

∎

För ett tredjegradspolynom erhåller man, efter division med motsvarande faktor, ett andragradspolynom vilket sätts = 0 och därefter löses med identitet 1.21.

Övningar

1.50 Faktorisera följande polynom så långt som möjligt. Polynomen har minst ett rationellt nollställe.

a) $2x^3 - 3x^2 + 1$ b) $2x^3 + 3x^2 - 4x - 6$

c) $x^3 + x^2 + 2x + 2$ d) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$

1.51
a) Utveckla uttrycket

$$\frac{2 + 3x - 6x^2 - 9x^3 + 2x^4 + 3x^5}{x^2 + x - 1}$$

b) Lös ekvationen $0 = 2 + 3x - 6x^2 - 9x^3 + 2x^4 + 3x^5$
Ekvationen har minst en rationell rot!

1.52 Lös ekvationen $9 - 39\,x + 58\,x^2 - 36\,x^3 + 8\,x^4 = 0$. Ekvationen har en rationell dubbelrot. Skriv VL som en produkt av polynom av lägsta möjliga grad

1.53 Polynomet
$f(x) = x^3 + (\sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2})x^2 + (\sqrt{6} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})x + 6$ har ett nollställe $x = \sqrt{3}$.
Faktorisera $f(x)$ så långt som möjligt!

1.54 Faktorisera följande polynom så långt som möjligt. Polynomen av grad tre har minst ett rationellt nollställe.

a) $3\,x^3 + 5\,x^2 + 8\,x + 4$ b) $2\,x^3 - 7x^2 + x + 1$

c) $8\,x^3 + 12\,x^2 + 6\,x + 1$ d) $1 - 5\,x^2 + 4\,x^4$

1.55 beräkna konstanten a så att polynomet $f(x)$ för ett nollställe i $x = b$. Tag också fram övriga nollställen till polynomet.

a) $f(x) = 3x^3 + 5x - ax^2 - 1, \quad x = b = 1/3$

b) $f(x) = 3x^6 - ax^4 - 3x^2 + 3, \quad x = b = 1$

c) $f(x) = x^4 - 2x^2 - ax, \quad x = b = 2$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 - ax - 1, \quad x = b = -1$

Formel för tredjegradsekvation *

Man kan i princip även lösa tredje- och fjärdegradsekvationer med formler innehållande rotuttryck liknande $p-q$ formeln. För en allmän tredjegradsekvation (ekv. 1.25) börjar man dock med att "eliminera" andragradstermen i

$$x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \tag{1.25}$$

genom att använda substitutionen $x-\alpha/3=t$, varvid man erhåller

$$t^3+\frac{3\beta-\alpha^2}{3}t+\frac{2\alpha^3}{27}-\frac{\alpha\beta}{3}+\gamma=0\ . \tag{1.26}$$

De nya koefficienterna kallar man nu för a respektive b:

$$t^3+at+b=0 \tag{1.27}$$

Den i sin tur har en lösningsformel, åtminstone för en av rötterna:

$$x-\frac{\alpha}{3}=t=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}}}-\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}}} \tag{1.28}$$

1.6 Förenkling av uttryck II

Förenkling innebär en bra träning i algebra. Man använder de befintliga räknelagarna (1.11).

Exempel 1.92 Förenkla $\frac{x-y}{y^2-x^2}$. **Lösning:** $\frac{x-y}{y^2-x^2}=\frac{-(y-x)}{(y-x)(y+x)}=-\frac{1}{x+y}$

■

Exempel 1.93 Förenkla $\frac{a+2b^2}{a^2-4b^4}$

Lösning

Man ser att $4b^4=(2b^2)^2$. I nämnaren står alltså differensen mellan två kvadrater:

$$\frac{a+2b^2}{a^2-4b^4}=\frac{a+2b^2}{a^2-(2b^2)^2}=\frac{a+2b^2}{(a-2b^2)(a+2b^2)}=\frac{1}{a-2b^2}$$

■

EXEMPEL 1.94 Förenkla $\dfrac{(x+a)^2+\left(\dfrac{ab}{x}+b\right)^2}{b^2+x^2}$

Lösning

$$\frac{(x+a)^2+\left(\dfrac{ab}{x}+b\right)^2}{b^2+x^2} = \frac{(x+a)^2+\dfrac{b^2}{x^2}(a+x)^2}{b^2+x^2} = \frac{(x+a)^2\left(\dfrac{b^2}{x^2}+1\right)}{b^2+x^2} =$$

$$= \frac{(x+a)^2\cdot\dfrac{b^2+x^2}{x^2}}{b^2+x^2} = \frac{(x+a)^2}{x^2} = \left(1+\frac{a}{x}\right)^2$$

■

EXEMPEL 1.95 * Förenkla $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ om $-1 \le x \le 0$. Ledning: Uttrycket under det yttre rottecknet kan skrivas som en jämn kvadrat

Lösning

$$1-\sqrt{1-x^2} = 1-\sqrt{1-x}\sqrt{1+x} = \frac{1}{2}\left(2-2\sqrt{(1-x)(1+x)}\right)$$

Vi antar nu att $2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}$ är den dubbla produkten.
$2=(1-x)+(1+x)=(\sqrt{1-x})^2+(\sqrt{1+x})^2$, d.v.s.

$$\frac{1}{2}\left(2-2\sqrt{(1-x)(1+x)}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left((\sqrt{1-x})^2+(\sqrt{1+x})^2-2\sqrt{(1-x)(1+x)}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})^2$$

således är

$$\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})$$

Eftersom "$\sqrt{\ }$" alltid är ≥ 0 och $-1 \le x \le 0$ så är $\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x} \ge 0$, varför det är "$+$" som gäller.
Svar: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})$

■

Vid förenkling av uttrycken nedan kommer identiteterna i (1.11) sidan 16 väl till pass.

Övningar

1.56 Förenkla...

a) $\dfrac{9-x^2}{3+x}$ b) $\dfrac{2+1/x}{4x-1/x}$

c) $\dfrac{(\sqrt{x})^2}{x^2-x}$ d) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2+3x-1}{x^2}+x^{-2}$

e) $(x+1)^2-(x-1)^2$ f) $\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{2x}$

1.57 Förenkla följande uttryck

a) $\dfrac{\sqrt{3}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}}{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$ b) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

d) $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x^2-1}}$ e) $\dfrac{x^2-x\sqrt{2}-1}{x\sqrt{2}-1+\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{(a-b)^3+b^3+2a^3}{a^3+b^3}$

1.58 Förenkla uttrycken

a) $\dfrac{\dfrac{1}{x}+2\,x+x^3}{1+x^2}$ b) $\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{a+x^2}}}{x+\sqrt{a+x^2}}$

c) $\dfrac{4\,t^2-a^2}{(a+2\,t)^2}$ d) $\dfrac{(2\,a\sqrt{a}+2\,a\,b)\left(1-\dfrac{b^2}{a}\right)}{\sqrt{a}+b}$

e) $\dfrac{a^3+x^3}{\sqrt{a+x}\left(ax+(-a+x)^2\right)}$ f) $\dfrac{x^2}{1+x}+\dfrac{x^2-x\,y}{x+x^2-y-x\,y}$

1.59 Förenkla följande uttryck

a) $\dfrac{\dfrac{27}{x^4}+\dfrac{6}{x^2}-1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3+\dfrac{8}{x^3}}$ b) $\dfrac{1+x\,y+y^2}{1+x}+\dfrac{y^3-x^3}{x+x^2-y-x\,y}$

c) $\dfrac{1-4\,x^4}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3-\dfrac{5}{x^2}}$ d*) $\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{28}{27}}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{28}{27}}-1}$

1.60 Förenkla nedanstående uttryck

a) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-1}$ b) $\dfrac{3x^3+4x^2+7x+2}{3\,x^2-5\,x-2}$

c) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}}$ d) $\dfrac{\dfrac{a^3+b^3}{a+b}-ab}{(b-a)^2}$

e) $\dfrac{\sqrt{x}+x}{x-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ f*) $\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{2-x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x-1}}-\sqrt{1-\sqrt{x-1}}}$

1.61 Lös ut y i ekvationerna nedan

a) $\dfrac{3x^3}{y^2}=\dfrac{y}{9}$ b) $\dfrac{3}{y}+\dfrac{2x}{5}=\dfrac{1}{x}$ c) $\dfrac{1}{y}+3y=2x$

d) $xy=y+5x-1$ e) $\dfrac{x}{y-\dfrac{1}{y}}=\dfrac{1}{2}$ f) $\sqrt{\dfrac{1-y}{1+y}}=x$

1.7 Ekvationssystem

Ett ekvationssystem innebär att man har flera ekvationer och i allmänhet också flera variabler/obekanta. För att lösa ett sådant system kan man eliminera endera variabeln och på så sätt erhålla en ekvation med en variabel/obekant.

Exempel 1.96 Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = y^2 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Lösning

Den undre ekvationen ger att $x=\dfrac{6}{y}$. insättes detta i den övre ekvationen erhålls

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{6/y+y}{6/y-y}=\frac{\dfrac{6+y^2}{y}}{\dfrac{6-y^2}{y}}=\frac{6+y^2}{6-y^2}=y^2$$

Nu är det lämpligt att sätta $y^2=t$, vilket ger

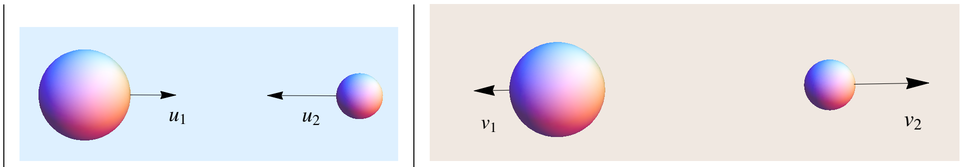
$$\frac{6+t}{6-t}=t \iff 6+t=6t-t^2 \iff t^2-5t+6=0 \iff \begin{cases} t=2 \\ \text{eller} \\ t=3 \end{cases}$$

Eftersom $t = y^2$ och $t = 2$, så är $y = \pm\sqrt{2}$. insättes detta i den undre ekvationen erhålls att $x = \pm 3\sqrt{2}$, vilket ger att $(x, y) = \pm(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$. P.s.s. ger $t = 3$ lösningarna $(x, y) = \pm(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

■

Följande problem är hämtat från mekanik (fysik).

Exempel 1.97 Ett föremåls rörelsemängd p definieras som dess massa m gånger dess hastighet v, d.v.s. $p = mv$. Dess rörelseenergi definieras som $W_k = \dfrac{mv^2}{2}$. två föremål som stöter samman (kolliderar) har bevarad rörelsemängd. Vi betecknar föremålens massa m_1 respektive m_2. Hastigheterna före skrivs u_1 respektive u_2 och hastigheterna efter skrivs v_1 respektive v_2.



Före kollision *Efter kollision*

Hastigheterna har "riktning", vilket här innebär att riktningen åt höger är positiv och riktningen åt vänster är negativ. Att föremålen har bevarad rörelsemängd skrivs

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

Detta kan också skrivas

$$m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2).$$

Vid en s.k. (fullständigt) elastisk stöt är även rörelseenergin bevarad d.v.s.

$$m_1u_1^2 + m_2u_2^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2$$

där båda led är multiplicerade med 2. Vi skall betrakta hastigheterna som obekanta och försöka få ett samband mellan dessa. Eftersom det rör sig om fyra hastigheter och endast två ekvationer kan vi endast undersöka hur hastighetsfördelningen bevaras mellan före och efter kollision. Genom att flytta om termerna i den sista ekvationen får vi

$$m_1u_1^2 - m_1v_1^2 = m_2v_2^2 - m_2u_2^2$$

Detta kan skrivas

$$m_1(u_1 - v_1)(u_1 + v_1) = m_2(v_2 - u_2)(u_2 + v_2).$$

Genom att ledvist dividera med

$$m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2)$$

erhålls

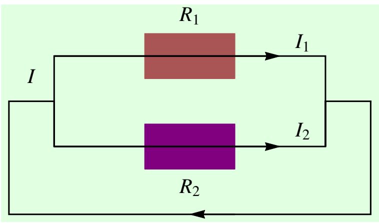
$$\frac{m_1(u_1 - v_1)(u_1 + v_1)}{m_1(u_1 - v_1)} = \frac{m_2(v_2 - u_2)(u_2 + v_2)}{m_2(v_2 - u_2)}$$

d.v.s.

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \text{ eller ekvivalent } u_1 - u_2 = v_2 - v_1.$$

■

Exempel 1.98 Följande elkrets har strömmarna I_1 och I_2 som obekanta. Vi förutsätter att resistanserna och I är kända.



Samband:

$$\begin{cases} R_1 I_1 = R_2 I_2 \\ I_1 + I_2 = I \end{cases}$$

Detta är ett *linjärt ekvationssystem, ES* med två ekvationer och två variabler (obekanta). I_1 och I_2 kan beräknas på följande sätt.

$$\begin{cases} R_1 I_1 = R_2 I_2 \\ I_1 + I_2 = I \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{R_1}{R_2} I_1 = I_2 \\ I_1 + I_2 = I \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{R_1}{R_2} I_1 = I_2 \\ I_1 + \frac{R_1}{R_2} I_1 = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) I_1 = I. \end{cases}$$

Vi får från andra ekvationen

$$I_1 = \frac{R_2\, I}{R_1 + R_2} I \text{ och p.s.s. } I_2 = \frac{R_1\, I}{R_1 + R_2}.$$

■

Exempel 1.99 Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 8 \\ x \cdot y &= 3 \end{cases}$$

Lösning

Andra ekvationen kan skrivas $y = \dfrac{3}{x}$. Insatt i första ekvationen får vi

$$x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 8 \Longleftrightarrow x^4 - x^2 - 9 = 0.$$

Sätt $x^2 = t$ och vi får andragradsekvationen

$$t^2 - 8t - 9 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Eftersom $t = x^2 \geq 0$ är endast $t = 9$ möjlig. Detta ger $t = 9 = x^2 \Longleftrightarrow x = \pm 3$.
Insatt i den andra ekvationen ser vi att $y = 1$ respektive $y = -1$.
Svar: $(x, y) = (-3, -1)$ eller $(x, y) = (3, 1)$.

■

Övningar

1.62 Lös ekvationssystemen

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 &= 15 \\ xy &= 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y^2 &= 4 \\ 2xy &= 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 3y &= 5 \\ x^2 + 6y &= 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + 2y &= 1 \\ x - y &= 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 &= 3 \\ x^2 y &= 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \sqrt{x+1} &= y \\ x - y &= 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \sqrt{x}\sqrt{y} &= 1 \\ x + y &= 4 \end{cases}$ h) $\begin{cases} y\sqrt{x} &= 1 \\ x + \dfrac{1}{y} &= \dfrac{15}{4} \end{cases}$

1.63 Lös ekvationssystemen

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 &= 1 \\ x\,y + x\,z + y\,z &= 2 \\ x + y + z &= 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + 5 &= 0 \\ xy + yz + zx &= 4 \\ xyz &= 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \\ x + y + z &= 0 \\ (x+y)\,(x+z)\,(y+z) &= 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 &= 6 \\ xy &= 1 \\ x + y &= z \end{cases}$

1.8 Olikheter

1.8.1 Grundläggande regler

Olikheter mellan två reella tal är en fråga om orientering på talaxeln.

EXEMPEL 1.100 $5 > 3$ läses “5 är (strängt) större än” och $5 \geq 3$ läses 5 är större eller lika med 3”.
Olikheterna kan också läsas “3 är (strängt) mindre än 5” respektive läses “3 är mindre eller lika med 5”.
Observera att $3 \leq 5$ och $3 < 5$ och $5 \leq 5$ men *inte* $5 < 5$.
Följande olikheter illustrerar vilka räkneregler som gäller för olikheter. Här nedan används $<$ men man kan lika väl använda $\leq$.

$$\begin{array}{llll}
3 < 5 & -3 > -5 & 2 \cdot 3 < 2 \cdot 5 & \dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{3} \\[2ex]
-3 < 5 & \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{5} & 3 + a < 5 + a & 3^2 < 5^2 \\[2ex]
5 \cdot 3 > 0 & (-5) \cdot (-3) > 0 & 5 \cdot (-3) < 0 & (-1) \cdot (-5) \cdot 3 > 0 \\[2ex]
\dfrac{5}{3} > 0 & \dfrac{5}{-3} = \dfrac{-5}{3} = -\dfrac{5}{3} < 0 & \dfrac{-5}{-3} > 0 & \sqrt{3} < \sqrt{5}
\end{array}$$

■

Vi ser i exemplet ovan att *olikhetens riktning bibehålls* bl.a.

1. då ett tal adderas (eller subtraheras) i båda led,
2. vid multiplikation (eller division) med ett positivt tal,
3. vid rotutdragning och kvadrering om båda led ≥ 0,

Det är främst dessa tre egenskaper som vi kommer att använda. För olikheter gäller dessutom följande:

- $a > b > 0 \iff 0 < 1/a < 1/b$
- $a < 0 < b \iff 1/a < 0 < 1/b$
- $0 < a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}$
- $ab > 0 \iff a$ och b har samma tecken[10]
- $\dfrac{a}{b} > 0 \iff a$ och b har samma tecken

[10] Att de har samma tecken betyder att båda antingen är positiva eller negativa.

- $ab < 0 \Longleftrightarrow a$ och b har olika tecken[11]
- $\dfrac{a}{b} < 0 \Longleftrightarrow a$ och b har olika tecken

Exempel 1.101 För att avgöra vilket av talen 9 och $4\sqrt{5}$ som är störst konstaterar vi att båda är positiva och jämför deras kvadrater:

$$9^2 = 81, \quad \text{respektive } (4\sqrt{5})^2 = 16 \cdot 5 = 80$$

Eftersom $4\sqrt{5}$ har minst kvadrat gäller att $4\sqrt{5} < 9$.

■

1.8.2 Olikheter för rationella uttryck

Exempel 1.102 För vilka x gäller att $3 - 2x < 0$?

Lösning

Olikhetens "riktning" ändras inte vid överflyttning av termer (där man byter tecken på termen som överflyttas till det andra ledet.). Olikheten kan då skrivas $3 < 2x$. Division med det positiva talet 2 ändrar heller inte "riktning" på olikheten. Vi får då $x > \dfrac{3}{2}$.

■

Exempel 1.103 För vilka x är $x^2 > 3$? Vi konstaterar att $x = 5$ uppfyller denna olikhet, liksom $x = -2$. Tydligen är det $x > \sqrt{3}$ men även $x < -\sqrt{3}$ som utgör lösningen.

■

Exempel 1.104 Lös olikheten $(x - 1)(x + 3) \leq 0$.

[11] Att de har olika tecken betyder att precis en är negativ.

Lösning

En produkt ≤ 0 precis då ett udda antal faktorer ≤ 0. därför är produkten ≤ 0 om $x-1 \leq 0$ och $x+3 > 0$ eller om $x-1 > 0$ och $x+3 \leq 0$. Sammantaget är produkten ≤ 0 precis då $-3 \leq x \leq 1$. Observera att olikheten $(x-1)(x+3) \leq 0$ också kan skrivas

$$-(x-1)(x+3) = (1-x)(x+3) \geq 0$$

Om vi i stället börjar med att utveckla $(x-1)(x+3) = x^2+2x-3$ och försöker att lösa olikheten $x^2+2x-3 \leq 0$ blir det betydligt svårare.

■

EXEMPEL 1.105 Lös olikheten $(x-1)^2 - 3 > 2x^2 + x$.

Lösning

$$(x-1)^2 - 3 > 2x^2 + x \Longleftrightarrow (x-1)^2 - 3 - 2x^2 - x > 0 \Longleftrightarrow -2 - 3x - x^2 > 0$$

P.g.a. minustecknen, multiplicerar vi med -1 i båda led.

$$x^2 + 3x + 2 < 0 \Longleftrightarrow x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) < 0$$

Denna produkt < 0 precis då en av faktorerna < 0.
Vi använder nu teckenschema för att lösa olikheten. För att hålla reda på faktorernas tecken gör vi ett *teckenschema*.

$x-$axel	x	$<$	-2	$<$	-1	$<$
faktorn	$(x+2)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
faktorn	$(x+1)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Hela uttrycket i VL	$(x+1)(x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

De/den kolumnen i sista rad som innehåller minustecken ger nu svaret.
Svar: $-2 < x < -1$

■

En olikhet för rationella uttryck kan skrivas

$$g(x) \leq h(x) \quad \text{där } g(x) \text{ och } h(x) \text{ är rationella uttryck} \tag{1.29}$$

EXEMPEL 1.106 Lös olikheten $x < 2x^2$.

Lösning

Man kan med fördel flytta över termerna på samma sida ex.vis $0 < 2x^2 - x = x(2x-1)$. En produkt är positiv, om båda faktorerna är positiva men också, om båda faktorerna är negativa. Den första faktorn x växlar tecken vid $x = 0$. Den andra faktorn $2x-1$ växlar tecken då $x = 1/2$; Den är negativ om $x < 1/2$ och positiv om $x > 1/2$. För att hålla reda på faktorernas tecken gör vi alltså ett *teckenschema.*

x−axel	x	$<$	0	$<$	1/2	$<$
faktorn	x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
faktorn	$2x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Hela uttrycket i HL	$x(2x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Sista raden utgör en "summering" av tecknen i de två ovanstående raderna kolumn för kolumn. Eftersom vi skall lösa olikheten $0 < x(2x-1)$ ges lösningen av den sista radens kolumner, vilka innehåller +tecken. Olikheten gäller alltså för precis de x sådana att $x < 0$ eller $x > 1/2$.

■

Exempel 1.107 Lös olikheten $\frac{3}{2} + \frac{1}{2x} \leq 0$.

Lösning

Vi börjar med att skriva termerna i VL på MGN (jämför exempel 75 sidan 48).

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2x} = \frac{3x}{2x} + \frac{1}{2x} = \frac{3x+1}{2x}$$

Vi skall alltså lösa olikheten $\frac{3x+1}{2x} \leq 0$. Ett teckenschema liksom i det förra exemplet hjälper oss att lösa olikheten. Ej. def. står för "ej definierad".

x−axel	x	$<$	$-1/3$	$<$	0	$<$
faktorn	$3x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
faktorn	$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Hela uttrycket i VL	$\frac{3x+1}{2x}$	$+$	0	$-$	ej def.	$+$

Av teckenschemat ser vi att $\frac{3x+1}{2x} \leq 0$ för $-1/3 \leq x < 0$.

■

Exempel 1.108 Lös olikheten

$$\frac{6}{x^2+x} \leq \frac{2x-1}{x^2-1}$$

Lösning

Nu följer samma omskrivning som i exempel 1.81. I stället för likhet som i exempel 1.82 sidan 52 får vi en olikhet

$$\frac{-2(x-2)(x-3/2)}{x(x-1)(x+1)} \leq 0 \Longleftrightarrow \frac{2(x-2)(x-3/2)}{x(x-1)(x+1)} \geq 0$$

Vi har alltså fem faktorer med nollställena $x=-1, x=0, x=1, x=3/2, x=2$. Teckenschemat skall således innehålla samtliga fem faktorer!

x	$<$	-1	$<$	0	$<$	1	$<$	$3/2$	$<$	2	$<$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3/2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2(x-2)(x-3/2)}{x(x-1)(x+1)}$	$-$	ej def.	$+$	ej def.	$-$	ej def.	$+$	0	$-$	0	$+$

Olikheten är uppfylld för de *intervall* där vi summerat till plustecken.
Svar: $-1 < x < 0$ eller $1 < x \leq 3/2$ eller $2 \leq x$.

■

Exempel 1.109 Lös olikheten $\dfrac{1}{x} > \dfrac{x}{x+2}$

Lösning

Genom att ex.vis flytta över HL till vänster led och därefter skriva VL på gemensamt bråkstreck erhålls

$$\frac{1}{x} - \frac{x}{x+2} > 0 \Longleftrightarrow \frac{(x+2)-x^2}{x(x+2)} = \frac{(2-x)(x+1)}{x(x+2)} > 0$$

Sätt nu

$$\frac{(2-x)(x+1)}{x(x+2)} =: f(x)$$

Vi skall alltså bestämma de x för vilka $f(x) > 0$ återigen med teckenschema.

x	$<$	-2	$<$	-1	$<$	0	$<$	2	$<$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$	ej def	$+$	0	$-$	ej def	$+$	0	$-$

Sammantaget ser vi att olikheten håller för precis de x för vilka $-2 < x < -1$ eller $0 < x < 2$.

■

För att lösa en olikhet $g(x) \leq h(x)$ (m.a.p. variabeln x) är det lämpligt att följa punkterna nedan.

1. Flytta över ex.vis VL till HL:
$$g(x) - h(x) \quad \leq \quad 0 \tag{1.30}$$
2. Skriv VL på gemensamt bråkstreck med, som vanligt, MGN[12].
3. Faktorisera täljaren. nämnaren skall redan vara faktoriserad.
4. Gör ett teckenschema där varje faktor till såväl täljare som nämnare finns med. Ex.vis växlar $2x + 1$ tecken i $x = -1/2$.
5. Vid sammanräkningen av tecken gäller som vanligt att ett udda antal minustecken ger minus, d.v.s. < 0.
   I detta fall gäller ju olikheten (1.30) varvid de intervall, vilka vid sammanräkningen erhåller minustecken skall ingå i svaret.
   Speciellt kommer de punkter med som är nollställen till täljaren men aldrig de punkter, vilka är nollställen till nämnaren!

Exempel 1.110 Vi betraktar nu tre olika fall av olikheter där vi antar att vi lyckats skriva dem på MGN och med ett $HL = 0$.

$$\text{a)} \quad \frac{-1 - x^2}{x(x+1)} > 0 \quad \text{b)} \quad \frac{x - 2}{(x^2 + 3x + 3)x} \leq 0 \quad \text{c)} \quad \frac{(x-1)^2(2-x)}{x+1} > 0$$

a) Det rationella utrycket kan skrivas $\dfrac{-1 - x^2}{x(x+1)} = -\dfrac{1 + x^2}{x(x+1)} > 0$.
Minustecknet kan man få bort genom att multiplicera båda led med -1:

$$-\frac{1 + x^2}{x(x+1)} > 0 \Longleftrightarrow \frac{1 + x^2}{x(x+1)} < 0$$

täljaren $1 + x^2 > 0$ för *alla* x, varför man inte behöver ta med den i teckenschemat!

b) Den första faktorn i täljaren är inte faktoriserad. Vi försöker med kvadratkomplettering och finner att

$$x^2 + 3x + 3 = x^2 + 2 \cdot \frac{3x}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = (x + 3/2)^2 + \frac{3}{4}$$

[12] MGN = minsta gemensamma nämnare

Detta visar att faktorn $x^2 + 3x + 3 > 0$ och man behöver alltså inte ta med denna faktor i teckenschemat.

c) I $\dfrac{(x-1)^2(2-x)}{x+1}$ lägger vi märke till att $(x-1)^2 \geq 0$ för alla x. Den påverkar inte tecknet på uttrycket men täljaren $= 0$ för $x = 1$. Det kan vara bra att ta med denna faktor i teckenschemat.
Ett teckenschema för denna olikhet ser ut så här:

x	$<$	-1	$<$	1	$<$	2	$<$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\dfrac{(x-1)^2(2-x)}{x+1}$	$-$	ej def.	$+$	0	$+$	0	$-$

P.g.a. att uttrycket > 0 skall vi ta med de intervall som har fått plustecken.
Svar: $-1 < x < 1$ eller $1 < x < 2$

■

Exempel 1.111 Lös dubbelolikheten

$$\frac{x}{x+2} \leq \frac{3-x}{x} < \frac{3\,x-1}{x^2+3\,x}$$

Lösning

Vi börjar med att lösa den vänstra olikheten.

$$\frac{x}{x+2} \leq \frac{3-x}{x} \iff \frac{x}{x+2} - \frac{3-x}{x} \leq 0$$

Genom att skriva VL på gemensamt bråkstreck erhålls

$$f(x) := \frac{2\,x^2-x-6}{x\,(x+2)} = \frac{(x-2)\,(2\,x+3)}{x\,(x+2)} \leq 0$$

I sista ledet är täljaren faktoriserad. Faktorernas respektive nollställen är $x = -2, x = -3/2, x = 0, x = 2$. Nu är det dags för ett teckenschema.

x	$<$	-2	$<$	$-3/2$	$<$	0	$<$	2	$<$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x+3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	ej def.	$-$	0	$+$	ej def.	$-$	0	$+$

Den första olikheten är alltså uppfylld för $-2 < x \leq -3/2$ eller $0 < x \leq 2$. P.s.s. löser vi nu den andra olikheten. Vi skriver om olikheten genom att ex.vis flytta VL till HL.

$$\frac{3x-1}{x^2+3x} - \frac{3-x}{x} = \frac{x^2+3x-10}{x(x+3)} =: g(x) > 0$$

täljaren kan skrivas $x^2 + 2x - 10 = (x+5)(x-2)$. Teckenschema:

x	$<$	-5	$<$	-3	$<$	0	$<$	2	$<$
$x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$+$	ej def.	$-$	0	$+$

Den andra olikheten är alltså uppfylld för $x < -5$, $-3 < x < 0$ eller $x > 2$. Dubbelolikheten är uppfylld för de x som uppfyller *båda* enkelolikheterna. Detta är

$$-2 \leq x \leq -\frac{3}{2}$$

■

Övningar

1.64 Lös olikheterna

a) $-3x - 2 < x + 1$ b) $x^2 - 3x < 3(x+1)$ c) $2x - 3 \geq \dfrac{2}{x}$

d) $(x-1)^2 < 3x - 5$ e) $\dfrac{5x-1}{x^2+3x} \leq \dfrac{x-4}{x^2-x}$ f) $\dfrac{x^2-x}{x^3-1} < 1$

1.65 Lös följande olikheter

a) $\dfrac{1-x}{1+x} \geq \dfrac{1}{x}$ b) $\dfrac{2+x}{x} \geq x$

c) $\dfrac{1-x^2}{1+x} \geq \dfrac{2}{x+2}$ d) $\dfrac{2x-1}{x-1} \geq \dfrac{1}{x+1}$

e) $\dfrac{x}{3x^2+x} < \dfrac{2x+1}{x(x-1)}$ f) $\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x} < \dfrac{2}{x-1}$

g) $\dfrac{1}{x+3} \geq \dfrac{2}{x^2-1}$ h) $\dfrac{x}{2x-1} < \dfrac{1}{x-1} \leq \dfrac{1}{x}$

*1.8.3 Olikheter med rotuttryck **

I dessa fall får man improvisera med utgångspunkt från de grundläggande regler, vilka gäller för olikheter.
Om ex.vis $\sqrt{1-3x}$ ingår i en olikhet måste $1 \geq 3x$, d.v.s. $1/3 \geq x$ [13].
Dessutom gäller ju att $\sqrt{1-3x} \geq 0$.

Exempel 1.112 Lös olikheten $\sqrt{1-x} > x+5$

Lösning

Definitionen av $\sqrt{}$ förutsätter att $1-x \geq 0$, d.v.s. att $1 \geq x$. Dessutom gäller att $\sqrt{} \geq 0$.
Kan man utan vidare kvadrera båda led och behålla olikheten $>$?
Ex.vis så är $3 > -4$ men vid kvadrering av båda led erhålls "vänds" olikheten; $9 < 16$.
Denna vändning av olikheten inträder endast om HL < 0.
Men om HL < 0 så är olikheten uppfylld, ty $\sqrt{1-x} \geq 0$.
HL < 0 precis då $x < -5$.
Det återstår att undersöka fallet $x \geq -5$: $\sqrt{1-x} > x+5 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow 1-x > x^2+10x+25 \Longleftrightarrow 0 > x^2+11x+24 = ... = (x+3)(x+8)$$

Ett teckenschema vore lämpligt på detta stadium men om $x \geq -5$ är faktorn $(x+8)$ positiv emedan faktorn $(x+3)$ växlar tecken vid $x=-3$.
Olikheten $0 > (x+3)(x+8)$ gäller precis då $-5 \leq x < -3$. Sammantaget gäller den ursprungliga olikheten då $x < -3$.

■

Övningar

1.66 Lös olikheterna

a) $\sqrt{x+2} > 3x+2$ b) $\sqrt{2-x^2} > \sqrt{x}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 2x+1$

1.9 Absolutbelopp

Absolutbeloppet har dels en geometrisk tolkning och dels algebraisk tolkning.

Exempel 1.113 Med absolutbeloppet av -3 menas 3, och med absolutbeloppet av 3 menas också 3. Man skriver detta $|-3| = 3$ respektive $|3| = 3$.

[13] Om den inte står ensam i en nämnare, ty då måste $1/3 > x$

■

EXEMPEL 1.114 Förenkla $|2\sqrt{2}-3|$

Lösning

Eftersom $2\sqrt{2} \approx 2.8$ så är $2\sqrt{2} < 3$. därför är $|2\sqrt{2}-3|$ inte $2\sqrt{2}-3$ utan $|2\sqrt{2}-3| = 3-2\sqrt{2}$.

■

Absolutbeloppet av ett tal är alltså motsvarande positiva tal. Den exakta definitionen ser ut som följer:

Definition 1.3 Låt x vara ett reellt tal (d.v.s. $x \in \mathbb{R}$). Med absolutbeloppet av x menas

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases} \tag{1.31}$$

EXEMPEL 1.115

$(-3)^2 = 9$ och $3^2 = 9$. Eftersom $|-3| = 3$ inser man att $a^2 = |a|^2$

■

EXEMPEL 1.116 Ett begrepp som inte så sällan leder till missförstånd är rottecknet $\sqrt{\ }$.
Med $\sqrt{5}$ menas det positiva tal, vars kvadrat är $= 5$. däremot har ekvationen $x^2 = 5$ två lösningar, nämligen $\pm\sqrt{5}$.
Ytterligare en källa till missförstånd är $\sqrt{a^2}$.
Observera att $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$ och inte $= \pm 3$.
$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$, d.v.s. roten ur kvadraten ger inte tillbaka det ursprungliga talet (-3), utan alltid motsvarande positiva tal ($|-3| = 3$).

■

Sammanfattningsvis är alltså

$$\sqrt{a^2} \quad = \quad |a| \tag{1.32}$$

Generellt gäller även den **geometriska tolkningen** av absolutbelopp:

$$|a-b| \quad \text{är avståndet mellan } a \text{ och } b \text{ längs tallinjen.} \tag{1.33}$$

Exempel 1.117 $|3-7| = |-4| = 4$. Man iakttar också att avståndet mellan 3 och 7, på tallinjen är 4.

■

Speciellt är $|a-b| = |b-a|$ (avståndet mellan a och b är lika med avståndet mellan b och a)

Exempel 1.118 $|3+7| = 10$ kan nu tolkas som avstånd: $|3+7| = |3-(-7)|$; avståndet mellan 3 och -7 är 10 och p.s.s. avståndet mellan -3 och 7.

■

Man inser nu att

$$|a-b| \quad = \quad |b-a| \tag{1.34}$$

$$|a-b| = a-b \quad \text{om} \quad a \geq b \tag{1.35}$$

$$|a-b| = b-a \quad \text{om} \quad a \leq b \tag{1.36}$$

Exempel 1.119 För att avgöra vad $|2\sqrt{2}-3|$ är tar vi reda på vilket av talen $2\sqrt{2}$ och 3 som är störst. Eftersom de är positiva kan vi jämföra deras kvadrater. $(2\sqrt{2})^2 = 8$ och $3^2 = 9$. således är $2\sqrt{2}-3 < 0$.
därmed är $|2\sqrt{2}-3| = 3-2\sqrt{2}$.

■

Exempel 1.120 Ekvationen $|x+2| = 5$ har som lösning alla x, vars avstånd till -2 är 5. Lösningen är alltså $x = 3$ och $x = -7$.
Olikheten $|x+2| < 5$ har som lösning de x vars avstånd till -2 är strängt mindre än 5. Lösningen framställs ex.vis som ett öppet intervall: $(-7, 3)$.

■

Som en direkt följd av definitionen gäller att

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{om } x+3 \geq 0, \text{ d.v.s. om } x \geq -3 \\ \\ -x-3 & \text{om } x+3 < 0, \text{ d.v.s. om } x < -3 \end{cases}$$

Exempel 1.121 Olikheten $-1 < x < 1$ kan skrivas som $|x| < 1$.
Olikheten $x^2 < 9$ kan skrivas som $-3 < x < 3$, d.v.s. $|x| < 3$.
Olikheten $0 < x < 2$ kan skrivas som $-1 < x - 1 < 2 - 1 = 1$ d.v.s. $|x - 1| < 1$.

■

Följande räkneregler utom möjligen de två sista är uppenbara:

$$|a| \cdot |b| = |a \cdot b| \tag{1.37}$$

$$\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right| \tag{1.38}$$

$$|a+b| \leq |a| + |b| \tag{1.39}$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \tag{1.40}$$

$|a+b| \leq |a| + |b|$ kallas triangelolikheten. Om a och b har samma tecken gäller likhet.

Bevis: av 1.39 och 1.40. Eftersom båda led är ≥ 0 är olikheten ekvivalent med

$$|a+b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$$

Att denna olikhet är sann inses genom att utveckla båda led:

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2$$

$$\text{och } (|a| + |b|)^2 = |a|^2| + 2|a||b| + |b|^2$$

Eftersom $2ab \leq 2|a||b|$ följer olikheten.
Den sista olikheten (formel 1.40) följer om man sätter $a + b = c$, *d.v.s.* $c - b = a$.

$$|c| = |(c-b) + b| \leq |c - b| + |b| \Longleftrightarrow |c| - |b| \leq |c - b|$$

Eftersom $|c - b| = |b - c|$ så gäller även att

$$|b| - |c| \leq |c - b| \quad \text{alltså är} \quad ||b| - |c|| \leq |b - c|$$

■

Exempel 1.122 Lös ekvationen $|2x - 1| = 4$.

Lösning

Vi löser denna ekvation algebraiskt.
$|2x-1| = 2x-1$ om $x \geq 1/2$
Ekvationen kan då skrivas $2x-1=4$, vilken har lösningen $x = 5/2 \geq 1/2$.

$|2x-1| = -(2x-1)$ om $x < 1/2$
Ekvationen kan då skrivas $-2x+1=4$, vilken har lösningen $x = -3/2 < 1/2$.

$$\text{Svar: } x = 5/2, \quad x = -3/2$$

■

Punkten $x = 1/2$ kallas *brytpunkt*. För att lösa en ekvation eller olikhet innehållande absolutbelopp delar man in $\mathbb{R}$ i brytpunkterna, vilka alltså ges av absolutbeloppens nollställen.
Det är vanligt med falska rötter när ekvationen innehåller absolutbelopp men om $a \geq 0$ är en konstant, så gäller följande ekvivalens

$$|f(x)| = a \iff f(x) = \pm a \tag{1.41}$$

Rötterna i ovanstående exempel kunde alltså inte vara falska.

Exempel 1.123 Lös ekvationen $|2x+3| = 2 + |2-x|$.

Lösning

Vi finner att brytpunkterna ges av $2-x=0$ och $2x+3=0$, d.v.s. $x=2$ och $x=-3/2$. Vi ser också att $|2-x| = |x-2|$. För att lösa ekvationen betraktar vi uttrycket för tre olika delintervall för vilka gäller att

$$\text{I } x < -3/2, \qquad \text{II } -3/2 \leq x < 2, \qquad \text{respektive III } 2 \leq x$$

Vi flyttar över alla termer innehållande x till samma sida.

$$|2x+3| - |x-2| = \begin{cases} -(2x+3)+(x-2) = -x-3 = 2 & \text{om} \quad x < -3/2 \quad \text{(I)} \\ (2x+3)+(x-2) = 3x+1 = 2 & \text{om} \quad -3/2 \leq x < 2 \quad \text{(II)} \\ (2x+3)-(x-2) = x+5 = 2 & \text{om} \quad 2 \leq x \quad \text{(III)} \end{cases}$$

Man får lösningarna i de tre del intervallen till

$$\text{I: } x = -7 < -3/2, \qquad \text{II: } x = \frac{1}{3}, -3/2 \leq 1/3 < 2, \qquad \text{III: } x = -3 < 2$$

Vi ser att $x = -7$ och $x = 1/3$ är riktiga (sanna) rötter emedan $x = -3$ är falsk eftersom vi här betraktar $x \geq 2$.

■

Exempel 1.124 Lös ekvationen $|1-x| - |3x+2| = x$.

Lösning

Vi har brytpunkterna $x = -2/3$ och $x = 1$. Samtidigt iakttar vi att $|1 - x| = |x - 1|$.

$$|x-1| - |3x+2| = \begin{cases} -(x-1) + (3x+2) = x & \text{om } x < -2/3 \quad \text{(I)} \\ -(x-1) - (3x+2) = x & \text{om } -2/3 \leq x < 1 \quad \text{(II)} \\ (x-1) - (3x+2) = x & \text{om } 1 \leq x \quad \text{(III)} \end{cases}$$

Man får lösningarna i de tre del intervallen till

$$\text{I: } x = -3 < -2/3, \qquad \text{II: } x = -\frac{1}{5}, -2/3 \leq -1/5 < 1, \qquad \text{III: } x = -1 < 2$$

Vi ser att $x = -3$ och $x = -1/5$ är riktiga (sanna) rötter emedan $x = -1$ är falsk eftersom vi här betraktar $x \geq 1$.

■

Exempel 1.125 Lös ekvationen

$$|x+1| + |x^2 - 2| = 3$$

Här finner vi att brytpunkterna $x = -1$, $x = \sqrt{2}$ och $x = -\sqrt{2}$ (De två sista följer av att vi löser $x^2 - 2 = 0$.).
Vi delar alltså in $\mathbb{R}$ i delintervallen $x < -\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} \leq x < -1$, $-1 \leq x < \sqrt{2}$ och $\sqrt{2} \leq x$.

$$|x+1| + |x^2-2| = \begin{cases} -(x+1) + x^2 - 2 = 3 & \text{om } x < -\sqrt{2} \\ -(x+1) - (x^2-2) = 3 & \text{om } -\sqrt{2} \leq x < -1 \\ (x+1) - (x^2-2) = 3 & \text{om } -1 \leq x < \sqrt{2} \\ (x+1) + (x^2-2) = 3 & \text{om } \sqrt{2} \leq x \end{cases}$$

Man får då lösningarna

$$x = 3, x = -2, \quad \text{lösning saknas }, \quad x = 0, x = 1, \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

i respektive intervall.
För intervallet $x \leq -\sqrt{2}$ är $x = -2$ en riktig rot, emedan $x = 3$ är en falsk rot.
För intervallet $-1 < x \leq \sqrt{2}$ är båda lösningarna riktiga.
För $x > \sqrt{2}$ så är endast $(-1 + \sqrt{17})/2 > \sqrt{2}$ och därmed enda riktiga lösning.

$$\text{Svar: lösningarna är} \quad x = -2, x = 0, x = 1 \text{ och } x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

■

Övningar

1.67 Skriv utan absolutbelopp

a) $|3 - 8/\sqrt{3}|$ b) $\left|\dfrac{-5}{1-\sqrt{2}}\right|$ c) $\left|\dfrac{1}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{2}\right|$

d) $|\sqrt{\sqrt{7}-2} - 1|$ e) $|\sqrt{8} - 1 - \sqrt{3}|$ f) $|x^2 + 1|$

g) $|(x-1)^2|$ h) $|x^2 + 3x + 5|$ i) $a^2|a| - |a^3|$

1.68 Skriv utan absolutbelopp

a) $|a^2 - 2a + 1|$ b) $|x^2 + 3x - 4|$ c) $|x^3 - 1|$

1.69 Skriv med absolutbelopp (utan att använda x^2-termer).

a) $-2 < x < 2$ b) $-3 < x < 2$ c) $x^2 < 9$

d) $(x+1)^2 \geq 2$ e) $-1 < x < 3$ f) $-2 \leq x^2 - 2x < 3$

g) $x = \pm\sqrt{2}$ h) $\sqrt{(3-2x)^2}$ i) $-3 < x^2 - 4x < 2$

1.70 Lös följande ekvationer:

a) $|x^2 - 3x + 5| = 2$ b) $|2x+1| - |x-1| = |x|$

c) $|x^2 - x| + |1 - x| = 3$ d) $|x-1| + |x^2 - 3| = 1$

e) $|x+1| - |4 - x^2| = 2|x|$ f) $|1-x| + 2|x+2| = x^2 - 1$

g) $|1 - x^2| + x = |3 + 2x|$ h) $2|x+2| + |x+1| = |3+2x|$

i) $|3x - 1| + 4|x| = 2x + 1$

1.10 Blandade övningar

1.71 Lös ekvationerna (Lös ut variabeln x i d).)

a) $3 + \sqrt{x} = 2x$ b) $1 + \sqrt{3 - 2\,x} - \sqrt{3 + x} = 0$

c) $\dfrac{3}{1+x} - \dfrac{1}{x\,(1+x^2)} = \dfrac{1}{x}$ d) $\dfrac{1}{x} + 3y - \dfrac{y^2}{x} = 1$

e) $-\dfrac{x}{1+2\,x} + \dfrac{1}{x+1} = 0$ f) $\sqrt{t-3} - \sqrt{t} - \sqrt{1+2\,t} = 0$

1.72 Lös ekvationerna nedan. Gör också en lämplig kommentar till respektive lösning.

a) $x + 2 = 2\sqrt{x}$ b) $x + 3/4 + 2\sqrt{x} = 0$ c) $x + 1 + 2\sqrt{x} = 0$

d) $x - 3 = 2\sqrt{x}$ e) $x + 1 = 2\sqrt{x}$ f) $x + 3/4 = 2\sqrt{x}$

1.73 Utveckla med polynomdivision och PBU.

a) $\dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - x - 2}$ b) $\dfrac{4}{x^2 - 2}$ c) $\dfrac{t^6 - 1}{t^2 + 1}$ d) $\dfrac{4x}{x^4 + 4}$

1.74 Lös ekvationssystemen

a) $\{x - y = 1, \quad 2\,x\,y = 4\}$ b) $\{x - y^2 = 3, \quad x\,y = 4\}$

c) $\{x^2 + y^2 = 5, \quad x\,y = 2\}$ d) $\{x^2 + \dfrac{1}{y} = 3, \quad xy = 2\}$

1.75 Utveckla följande rationella funktioner

a) $\dfrac{3x^2 + 1}{x^2 - x - 2}$ b) $\dfrac{x^4 + 1}{x^4 - 1}$ c) $\dfrac{x^3 + 4x + 5}{x^2 + 6x + 5}$ d) $\dfrac{2x - 8}{x^3 + 8}$

1.76 Lös ekvationerna

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x - 1}} = \sqrt{x - 3}$

b) $\dfrac{7}{12x + 18} + \dfrac{9}{18 - 12x} = \dfrac{29 - 3x}{27 - 18x}$

c) $\dfrac{1}{x - x^2} - \dfrac{2}{x + x^2} = \dfrac{1}{1 - x^2} + \dfrac{1}{x}$

d) $\left(\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{x}\right)\left(\dfrac{2x}{5} + \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{5}{2} = \dfrac{3}{x}$

e) $\dfrac{2}{x^2 - x - 2} + \dfrac{2}{x^2 - 2x - 3} + \dfrac{3}{x + 1} = 0$

f) $2\sqrt{1 - x^2} = \dfrac{x\sqrt{5}}{\sqrt{1 + 5x^2}}$

1.77 Förenkla följande uttryck under förutsättning att $a^2 + b^2 = 1$.

a) $(1 - a^2)(1 - b^2)\left[\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)^2\right]$ b) $\dfrac{a^6 - b^6}{a^4 - b^4}$

1.78 Förenkla följande uttryck

a) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$ b) $\dfrac{\left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{3}{2}}}{5-2\sqrt{6}}$

c) $\dfrac{3}{2\,(x-1)} - \dfrac{3}{2\,(1+x)} + \dfrac{3\,x}{x^2-1}$

d) $\sqrt{a^4 + 2\,a^2\,x^2 + x^4}$

e) $\dfrac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{16} + \dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{16}$ f) $\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

g) $\dfrac{\left(x^3-1\right)\left(1+x+x^2+x^3\right)}{(x^2-1)\,(1+x+x^2)}$ h) $\dfrac{x^2y^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}{x+y}$

1.79 Lös följande ekvationer

a) $|2x+1|+1 = |1-x|$ b) $|x^2-4| = |x-1|+1$

c) $|2x+1| = \sqrt{|1-x|-1}$ d) $|2x+1| = \sqrt{3x^2-2}$

e) $(x+1)|2x-5| = x^2-1$ f) $|2-x^2| = x^2-x$

1.80 Lös ekvationerna respektive olikheterna

a) $\dfrac{1-x^2}{2x+1} = 0$ b) $\dfrac{1}{x} = 2-x$ c) $\dfrac{1+3\,x}{x-x^2} = \dfrac{1-3\,x}{x^2-1}$

d) $\dfrac{1-x^2}{2x+1} > 0$ e) $\dfrac{1}{x} \leq 2-x$ f) $\dfrac{1+3\,x}{x-x^2} \geq \dfrac{1-3\,x}{x^2-1}$

1.81 Lös olikheterna

a) $\dfrac{1}{x-1} < x+1$ b) $\dfrac{1}{x} < \dfrac{4}{x^2-7}$

c) $1 \leq \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x-7}$ d) $\dfrac{2}{1+x} \leq 1 - \dfrac{1}{\sqrt{7-x}}$

1.82 Utför (om möjligt) polynomdivisionerna m.a.p. x respektive t.

a) $\dfrac{1-x^2}{2x+1}$ b) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-3x+2}$ c) $\dfrac{3x+1}{x^3-9x}$

d) $\dfrac{t^2+1}{t^2-1}$ e) $\dfrac{4x-3}{(x-1)(x^2+2)}$ f) $\dfrac{6\,x^4+17\,x^3+8\,x^2-5\,x-2}{6\,x^2-x-1}$

1.83 Utveckla (genom att partialbråksuppdela) respektive rationellt uttryck i föregående uppgift.

1.11 Binomialteoremet

Räknereglerna $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ och $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

finns på sidan 16. För att förstå hur koefficienterna $1, 2, 1$ respktive $1, 3, 3, 1$ uppkommer behöver man begreppet *Kombinatorik*, som bl.a. innefattar begreppet *fakultet*.

Definition 1.4

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{om } n = 0 \\ n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1, & \text{om } n = 1, 2, ... \end{cases} \tag{1.42}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1.43}$$

Exempel 1.126

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, \qquad 5! = 5 \cdot 4 \cdot 6 = 120$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 3, \quad \binom{8}{0} = \frac{8!}{0! \cdot (8-0)!} = \frac{8!}{1 \cdot 8!} = 1.$$

■

Man kan visa ex.vis den andra av dem (d.v.s. första kuberingsregeln) genom att

- skriva ut faktorerna: $(a+b)(a+b)(a+b)$
- inse att termerna har utseendet $c_k a^k b^{3-k}, k = 0, 1, 2, 3$ där c_k är antalet sätt att välja k st a bland 3 st a utan hänsyn till inbördes ordning.
- Med *kombinatorik* visar man att dessa koefficienter är $c_k = \binom{3}{k}$.

$$\binom{3}{1} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1! \cdot (2-1)!}$$

- Eftersom $c_k = 1, 3, 3, 1$ för $k = 0, 1, 2, 3$, följer första kuberingsregeln.

Detta generaliseras nu lätt till
$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ st faktorer}}, \quad n = 1, 2, \dots.$

1. Termerna har utseendet $c_k a^k b^{n-k}, k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.
2. Koefficienterna är $c_k = \binom{n}{k}$.

Punkterna 1 och 2 ger

Sats 1.6 Binomialteoremet

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.44}$$

Övningar

1.84

a) Beräkna $\binom{4}{k}$ för $k = 0, 1, 2, 3, 4$ och utveckla sedan $(x+1)^4$

b) P.s.s. som i a) men $(2y-1)^5$

c) Visa att $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (välj $a = b = 1$ i binomialteoremet.)

d) Visa att $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ genom att utveckla $(1+s)^n \left(1 + \frac{1}{s}\right)^n$

Man kan rekursivt beräkna binomialkoefficienterna på följande sätt.
Pascals triangel:

$n=0$						1					
$n=1$					1		1				
$n=2$				1		2		1			
$n=3$			1		3		3		1		
$n=4$		1		4		6		4		1	
$n=5$	1		5		10		10		5		1

där binomialkoefficienterna $\binom{n}{k}$, $\quad k = 0, 1, \ldots, n$ utgör raderna. Observera, att för ex.vis $n = 4$ ger $1 + 4 = 5$, d.vs. 5 i raden under.

Appendix

Potenslagar

Följande identiteter gäller för potenser.

$$
\begin{aligned}
a^{x+y} &= a^x \cdot a^y \\
a^{x-y} &= \frac{a^x}{a^y} \\
(a^x)^y &= a^{x \cdot y} \\
(ab)^x &= a^x b^x \\
\left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x}
\end{aligned}
$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \quad a \geq 0 \quad n = 1, 2, \ldots \tag{.1}$$

För udda n är $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ definierade även för $a < 0$.
Som en konsekvens av identiteterna (potenslagarna) så är

$$a^0 = 1 \quad \text{och} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \tag{.2}$$

Logaritmlagar

Logaritmlagarna (med 10-bas); Om $a > 0$, $b > 0$ samt x godtyckligt så är

$$
\begin{aligned}
\lg(ab) &= \lg a + \lg b \\
\lg a^x &= x \lg a \\
\lg(a/b) &= \lg a - \lg b
\end{aligned}
$$

Facit

1.1

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{10}{3}$ c) y

d) $\frac{1}{10}$ e) $3xy^3$ f) $\frac{1}{2a^2b}$

g) $3(x+1)$ h) $3(x+1)$

1.2

a) $\frac{1}{4}$ b) $-\frac{1}{5}(x+3)$ c) $\frac{3}{8}$

d) $\sqrt{3}$ e) $-\sqrt{2}$ f) $\frac{2}{3}$

g) $\frac{x+y}{xy}$ h) $\frac{xy}{x+y}$

1.3

1.4

a) $y-4x$ b) 0

c) $2x-7$ d) $\sqrt{x-y}-\sqrt{x}+\sqrt{y}$

1.5

a) $-(\sqrt{3}+y-2x)$ b) $-(x^2-2+4x)$

c) $-(2y-5x)$ d) $-(y+\sqrt{x-y})$

1.6

a) $\frac{3-2b}{x-4}$ b) $\frac{a^2-x^2}{x-3}$ c) $\frac{7x-1}{x+1}$

d) $\frac{3-x+y}{2x-y}$ e) $\frac{x^2-1}{y^2-1}$ f) $\frac{3x-y-2}{3y-x+2}$

1.7

a) $-49, 49$ b) $-81/4, 81/4$

c) $-3, 3$ d) $-14, 14$

1.8

$$\text{a) } \left\{-8, \frac{25}{4}, \frac{3}{2} + 5\sqrt{2}\right\}, \text{ b) } \left\{5, 3\sqrt{5}, 2\sqrt{3}\right\}$$

1.9

a)	$15x + 6$	b)	$12 - 8t$	c)	$2x + 2\sqrt{x}$
d)	$2x - 2y - 2$	e)	$3x^2 + 2x - 1$	f)	-1
g)	$x^2 - 2x + 1$	h)	6	i)	$4a^2 - 1$

1.10

a)	$3(x - 4)$	b)	$x(x + 2)$	c)	$3\left(t^2 + 2\right)$
d)	$7(2 - 7x)$	e)	$x\left(7 - x - x^2\right)$	f)	$3(x - 3)(x + 3)$

1.11

$$\text{a) } \frac{11x}{2} \qquad \text{b) } \frac{x}{3}(5 - x) \qquad \text{c) } \frac{3(3x + 2)y}{x^2}$$

1.12

a)	$ab - a + 2b - 2$	b)	$\frac{x^2}{2} + x - 4$
c)	$4a^2 + 12a + 9$	d)	$x^3 + 1$

1.13

$$(a + 1)(x - a)$$

1.14

$$a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2$$

1.15

$$\text{a) } 80 \text{ min} \qquad \text{b) } \begin{cases} \text{I} & x > y \\ \text{II} & \dfrac{xy}{x - y} \\ \text{III} & \dfrac{20 \cdot 16}{20 - 16} = 80 \end{cases}$$

1.16 30 respektive 60 minuter

1.17

1.18

a)	$5\sqrt{5}$	b)	$3\sqrt{14}$
c)	$8\sqrt{2}$	d)	$2\sqrt{33}$

1.19

a)	$\sqrt{21}$	b)	$\sqrt{24}$
c)	$\sqrt{98}$	d)	$-\sqrt{140}$

1.20

a) 6 b) 2 c) 1 d) 1

e) $\sqrt{2}$ f) $\sqrt{5}$ g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ h) $\sqrt{2}$

i) 12 j) $\sqrt{5}$ k) $11\sqrt{3}$ l) 3

1.21

a) $\dfrac{3xy}{y-1}$ b) $\dfrac{7}{y}$ c) $t-1$ d) $\dfrac{2}{t+2}$

e) $\sqrt{3}$ f) $4\sqrt{3}$ g) $\dfrac{1}{2}$ h) $\sqrt{x-1}$

i) $\sqrt{x}+1$ j) $\sqrt{3x}$ k) $\sqrt{x-1}(x+1)$ l) 2

1.22

a) -1 b) 0 c) $0,$

d) $2(a-b)z,$ e) $b-a,$ f) $\dfrac{x}{x+1}$

1.23

a) -1 b) $10(x-2)x$ c) $xy+\dfrac{1}{2}$

d) 1 e) -3 f) $\dfrac{2b}{5a}$

1.24

a) $2+\sqrt{3}$ b) $1+\sqrt{2}$ c) $\dfrac{1}{4}\left(5-\sqrt{5}\right)$

d) $\dfrac{1}{2}\left(15-\sqrt{221}\right)$ e) $\sqrt{5}-2$ f) $5\sqrt{2}-7$

1.25

a) $x=-6/11$ b) $x=53/5$ c) $x=1$

d) $x=6/7$ e) $x=0$ f) Rot saknas.

1.26

a) $x=-1,\ x=2$ b) $x=-3,\ x=2/3$

c) $x=-2,\ x=3/4$ d) $x=-1,\ x=2/7$

1.27

a) $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$ b) $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$

c) $2\left(x+\dfrac{7}{4}\right)^2-\dfrac{121}{8}$ d) $-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{11}{4}$

a) Minsta värde $-\dfrac{9}{4}$ b) Minsta värde $-\dfrac{9}{4}$

c) Minsta värde $-\dfrac{121}{8}$ d) Största värde $-\dfrac{11}{4}$

a) $x(x+3)$ b) $(x-1)(x+2)$

c) $(x-1)(2x+9)$ d) Går ej

a) $\begin{cases} x=0 \\ x=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=-9/2 \\ x=1 \end{cases}$ d) Rot saknas.

1.28

a) $x=1,\ x=3$ b) $x=2\pm\sqrt{14}$ c) $x=\pm 1$

d) $x=0,\ x=1,\ x=2$ e) $x=\dfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{17})$ f) $x=4$

1.29

a) $x=-5/3,\ x=7/2,\ 6x^2-11x-35=(2x-7)(3x+5)$

b) $x=-3,\ x=1/9,\ 9x^2+26x-3=(x+3)(9x-1)$

c) $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}\pm\sqrt{6}\right),\ x^2-\sqrt{2}x-1=\dfrac{1}{4}\left(2x-\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(2x+\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ }

d) $x=\dfrac{1}{4}\left(\pm\sqrt{2}+\sqrt{10}\right),\ \sqrt{2}x^2-\sqrt{5}x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{8\sqrt{2}}\left(4x-\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)\left(4x-\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$

1.30

a) Minsta värde $-\dfrac{4}{3}$ b) Minsta värde $3/4$ c) Minsta värde $1/2$

d) Minsta värde -3 e) Minsta värde $7/4$ f) Minsta värde $-4/3$

1.31

$$\begin{cases} a=1,\ b=2 \\ a=2,\ b=1 \\ a=-1,\ b=-2 \\ a=-2,\ b=-1 \end{cases}$$

1.32

a) $(2t+1)\left(4t^2-2t+1\right)$

b) $\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t+\sqrt{2}\right)\left(t^2+2\right)$

c) $(t-1)(t+1)\left(t^2+1\right)$

d) $\left(t-\sqrt{2}+1\right)\left(t-\sqrt{2}-1\right)\left(t+\sqrt{2}-1\right)\left(t+\sqrt{2}+1\right)$

e) $(t-1)(t+1)\left(t^2-t+1\right)\left(t^2+t+1\right)$

f) $\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x^2-x\sqrt{3}+3\right)$

g) $\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)$

h) $(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$

1.33

$$a=8,\ (x-1)\left(3x^2+3x+8\right)$$

1.34

a) $(a-2b)(a+3b)$ b) $(x-3)(x+2)$ c) $\left(a-\left(\sqrt{2}-1\right)b\right)\left(a+\left(1+\sqrt{2}\right)b\right)$

d) $\dfrac{\left(x^2+1\right)\left(x+y^2\right)}{x}$ e) $\dfrac{(x-1)^2}{x}$ f) $\dfrac{(3x-1)(xy-2)}{y}$

1.35

a) $x=2$ b) $x=2$

c) $x=0$ d) $x=1,\ x=3$

1.36

a) Ingen rot b) Ingen rot c) $x=-1$

d) $x=\dfrac{1}{2}\left(5-\sqrt{17}\right)$ e) Ingen rot f) $x=-7$

g) $x=-1,\ x=3$ h) $x=2$

1.37

Ingen rot

1.38 Endast trianglarna i (a) och (b) är vinkelräta. (I (c) är triangeln med $c=25$ vinkelrät.)
1.39 (Visa att $a^2+b^2=c^2$.)

1.40

a) $\dfrac{3+5x-x^2}{x(x+1)}$ b) $\dfrac{t^2+5t+1}{(t-1)t(t+1)}$

c) $\dfrac{9+10t-t^2}{t^2(t+3)}$ d) $\dfrac{2t^2-5}{3t(t+1)}$

1.41

a) $x^2+2-\dfrac{1}{x}$ b) $2-\dfrac{2}{x+1}$ c) $\dfrac{2}{2x-1}+3$

d) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4(2x+1)}$ e) $x^2-x+3-\dfrac{4}{x+1}$ f) $x+\dfrac{x-1}{x^2+1}$

1.42

a) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x+1}$ b) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$ c) $\dfrac{13}{4(x-4)}-\dfrac{1}{4x}$

1.43

a) $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{1}{x}$ b) $-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}$ c) $1-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{5}{x-3}$

d) $2+\dfrac{1}{2(x+2)}-\dfrac{1}{2x}$ e) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}$ f) $\dfrac{2x-1}{x^2+2x+4}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x}$

1.44

a) $x=-2$ b) $x=-1/2$ c) $x=6/5$

d) $x=\pm\sqrt{2}$ e) $x=1/2$ f) $x=3$

1.45

a) $x=-4$ b) $x=\dfrac{6}{\pi+9}$ c) $x=-1/3$

d) $x=-1$ e) $x=\pm\sqrt{7}$ f) $x=-1/3$

1.46

a) $x=-1$, $x=1/2$ b) $x=-1/2$, $x=2$ c) $x=-1/2$, $x=2$

d) $x=\dfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{2})$ e) Rot saknas. f) $x=-1$

1.47

a) $x=1/2$ b) $x=2$

c) $x=\pm1/2$ d) $x=\pm3/\sqrt{2}$

1.48

$x=-6-b$ om $b\neq-6$. Om $b=-6$ saknas lösning.

1.49

$$\text{Om } a \neq b,\ x = 0,\ x = \frac{a+b}{2}.\ \text{Om } a = b \text{ saknas lösning.}$$

1.50

a) $(2x+1)(x-1)^2$ b) $(2x+3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

c) $(x+1)(x^2+2)$ d) $(2x+1)(x+1)(x+2)$

1.51

a) $3x^3 - x^2 - 5x - 2$ b) $\begin{cases} x = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \\ x = -2/3 \end{cases}$

1.52

$$\begin{cases} x = 1/2 \\ \\ x = 1 \\ x = 3/2 \text{ (dubbelrot)} \end{cases},\ (2x-1)(2x-3)^2(2x-1)$$

1.53

$$\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{6}\right)$$

1.54

a) $(3x+2)\left(x^2+x+2\right)$ b) $\frac{1}{4}(2x-1)\left(2x - \sqrt{13} - 3\right)\left(2x + \sqrt{13} - 3\right)$

c) $(2x+1)^3$ d) $(x-1)(x+1)(2x-1)(2x+1)$

1.55

a) $a = 7,\ x = 1/3,\ x = 1$ b) $a = -3,\ x = \pm 1$

c) $a = 4,\ x = 0,\ x = 2$ d) $a = 4,\ x = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{13}\right)$

1.56

a) $3 - x$ b) $\frac{1}{2x-1}$ c) $\frac{1}{x-1}$

d) $\frac{x+4}{x}$ e) $4x$ f) $x^2 + 3$

1.57

a) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ b) $7 + 4\sqrt{3}$ c) $\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^2$

d) 2 e) $\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)$ f) $\frac{3a}{a+b}$

1.58

a) $x + \dfrac{1}{x}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{a + x^2}}$ c) $\dfrac{2t - a}{2t + a}$

d) $2\left(a - b^2\right)$ e) $\sqrt{a + x}$ f) x

1.59

a) $\dfrac{3}{x} - 1$ b) $1 - x$

c) $x^2 - 2x^4$ d) 1

1.60

a) $\dfrac{1}{x - 1}$ b) $x + 3 + \dfrac{8}{x - 2}$ c) $\dfrac{\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}}{\sqrt{2}}$

d) 1 e) 1 f) $1,\ (1 < x \leq 2)$

1.61

a) $y = 3x$ b) $y = \dfrac{15x}{5 - 2x^2}$ c) $y = \dfrac{1}{3}\left(x \pm \sqrt{x^2 - 3}\right)$

d) $y = \dfrac{5x - 1}{x - 1}$ e) $y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$ f) $y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

1.62

a) $(x, y) = \pm(4, 1)$

b) $(x, y) = \pm\left(3/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$

c) $(x, y) = (\pm 2, -1/3)$

d) $(x, y) = (-1 \pm \sqrt{6}, -3 \pm \sqrt{6})$

e) $(x, y) = (\pm\sqrt{2}, 1)$

f) $(x, y) = (3, 2)$

g) $(x, y) = (2 \pm \sqrt{3}, 2 \mp \sqrt{3})$

h) $(x, y) = (9/4, 2/3)$

1.63

a) $(x,y,z)=(0,1,2)$ eller $(x,y,z)=(1,0,2)$

b) $\begin{cases} (x,y,z)=\left(\frac{1}{2}\left(-5-\sqrt{5}\right),\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-5\right),\frac{1}{5}\right) \\ (x,y,z)=\left(\frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{5}\right),\frac{1}{2}\left(-\sqrt{5}-5\right),\frac{1}{5}\right) \\ (x,y,z)=\left(\frac{1}{2}\left(-5-\sqrt{29}\right),\frac{1}{2}\left(\sqrt{29}-5\right),-1\right) \\ (x,y,z)=\left(\frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{29}\right),\frac{1}{2}\left(-\sqrt{29}-5\right),-1\right) \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x,y,z)=\left(1,\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right),\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right)\right) \\ (x,y,z)=\left(1,\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right),\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right) \\ (x,y,z)=\left(\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right),1,\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right)\right) \\ (x,y,z)=\left(\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right),1,\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right) \\ (x,y,z)=\left(\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right),\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5},1\right)\right) \\ (x,y,z)=\left(\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right),\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5},1\right)\right) \end{cases}$

d) $(x,y,z)=\pm(1,1,2)$

1.64

a) $x>-\dfrac{3}{4}$ b) $3-2\sqrt{3}<x<3+2\sqrt{3}$ c) $-\dfrac{1}{2}\leq x<0\vee x\geq 2$

d) $2<x<3$ e) $x<-3\vee 0<x<1$ f) $x\in\mathbb{R}$

1.65

a) $-1 < x < 0$

b) $x \leq -1 \vee 0 < x \leq 2$

c) $x < -2 \vee -1 \leq x \leq 0)$

d) $x < -1 \vee x = 0 \vee x > 1$

e) $-1 < x < -\dfrac{1}{3} \vee -\dfrac{1}{5} < x < 0 \vee x > 1$

f) $-3 < x < 0 \vee 1 < x < 3$

g) $-3 < x \leq 1 - 2\sqrt{2} \vee -1 < x < 1 \vee x \geq 1 + 2\sqrt{2}$

h) $\dfrac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right) < x < \dfrac{1}{2}$

1.66

a) $-2 \leq x < -\dfrac{2}{9}$ b) $0 \leq x < 1$ c) $x \geq 0$

1.67

a) $\dfrac{8}{\sqrt{3}} - 3$ b) $\dfrac{5}{\sqrt{2} - 1}$ c) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

d) $1 - \sqrt{\sqrt{7} - 2}$ e) $\sqrt{8} - 1 - \sqrt{3}$ f) $x^2 + 1$

g) $(x-1)^2$ h) $x^2 + 3x + 5$ i) 0

1.68

a) $(a-1)^2$

b) $|x^2 + 3x - 4| = \begin{cases} x^2 + 3x - 4, \text{ om } x \leq -4 \vee x \geq 1 \\ -x^2 - 3x + 4, \text{ om } -4 < x < 1 \end{cases}$

c) $|x^3 - 1| = \begin{cases} x^3 - 1, \text{ om } x \geq 1 \\ 1 - x^3, \text{ om } x < 1 \end{cases}$

1.69

a) $|x| < 2$ b) $|x + 1/2| < 5/2$ c) $|x| < 3$

d) $|x + 1| \geq \sqrt{2}$ e) $|x - 1| < 2$ f) $|x - 1| < 2$

g) $|x| = \sqrt{2}$ h) $|2x - 3|$ i) $1 < |x - 2| < \sqrt{6}$

1.70

a) Ingen rot   b) $x = 0$ c) Ingen rot

d) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \\ x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{21}-1\right) \end{cases}$ e) Ingen rot   f) $x = -2,\ x = 4$

g) $x = -2,\ x = \dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{17}\right)$ h) $x = -2$ i) $x = 0,\ x = 2/5$

Blandade övningar

1.71

a) $\dfrac{9}{4}$ b) $x = 1$ c) $x = 1$

d) $x = \dfrac{y^2-1}{3y-1}$ e) $x = \dfrac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$ f) Ingen rot

1.72

a) Ingen rot   b) Ingen rot   c) Ingen rot

d) $x = 9$ e) $x = 1$ f) $x = 1/4,\ x = 9/4$

1.73

a) $x + 1 + \dfrac{5}{3(x-2)} - \dfrac{2}{3(x+1)}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$

c) $t^4 - t^2 + 1 - \dfrac{2}{t^2+1}$ d) $\dfrac{1}{x^2-2x+2} - \dfrac{1}{x^2+2x+2}$

1.74

a) $(x, y) = (-1, -2),\ (x, y) = (2, 1)$ b) $(x, y) = (4, 1)$

c) $(x, y) = \pm(1, 2),\ (x, y) = \pm(2, 1)$ d) $(x, y) = (-2, -1),\ (x, y) = (3/2, 4/3)$

1.75

a) $3 - \dfrac{4}{3(x+1)} + \dfrac{13}{3(x-2)}$ b) $1 - \dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{1}{2(x-1)}$

c) $x - 6 + \dfrac{35}{x+5}$ d) $\dfrac{x-2}{x^2-2x+4} - \dfrac{1}{x+2}$

1.76

a) $x = 2 + \sqrt{3}$ b) $x = -1/3,\ x = 15/2$ c) $x = \pm\sqrt{3} - 1$

d) $x = -10/3,\ x = 6/5$ e) $x = 1,\ x = 8/3$ f) $x = 2/\sqrt{5}$

1.77

a) 2 b) $a^4 - a^2 + 1$

1.78

a) $\sqrt{2} - 1$ b) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^5$ c) $\dfrac{3}{x-1}$

d) $a^2 + x^2$ e) 1 f) $\dfrac{1}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right)$

g) $1 + x^2$ h) $x\,y$

1.79

a) $x = -1,\ x = -1/3$ b) $x = -1,\ x = -3,\ x = \dfrac{\pm 1 + \sqrt{17}}{2}$ c) $x = -1,\ x = -1/4$

d) $x = -3,\ x = -1$ e) $x = -1,\ x = 2,\ x = 4$ f) $x = 2,\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$

1.80

a) $x = \pm 1$ b) $x = 1$ c) $x = -1/5$

d) $x < -1 \vee -\dfrac{1}{2} < x < 1$ e) $x < 0 \vee x = 1$ f) $-1 < x \leq -\dfrac{1}{5} \vee 0 < x < 1$

1.81

a) $-\sqrt{2} < x < 1 \vee x > \sqrt{2}$ b) $x < -\sqrt{7} \vee 2 - \sqrt{11} < x < 0 \vee \sqrt{7} < x < 2 + \sqrt{11}$

c) $0 < x < \dfrac{7}{8} \vee x > 7$ d) $x < -1 \vee 3 \leq x \leq \dfrac{1}{2}\left(5 + \sqrt{17}\right)$

1.82

a) $-\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4(2x+1)}$ b) $1 + \dfrac{2}{x^2 - 3x + 2}$ c) $\dfrac{3x+1}{x^2 - 9x}$

d) $1 + \dfrac{2}{t^2 - 1}$ e) $\dfrac{4x - 3}{(x-1)\,(x^2+2)}$ f) $x^2 + 3x + 2$

1.83

a) $-\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4(2x+1)}$ b) $1 - \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{2}{x-2}$ c) $\dfrac{28}{9(x-9)} - \dfrac{1}{9x}$

d) $1 - \dfrac{1}{t+1} + \dfrac{1}{t-1}$ e) $\dfrac{11 - x}{3\,(x^2+2)} + \dfrac{1}{3(x-1)}$ f) $x^2 + 3x + 2$

1.84

a) Binomialoefficienterna är $1, 4, 6, 4, 1$ och

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$$

b) Binomialoefficienterna är $1, 5, 10, 10, 5, 1$ och

$$(2y-1)^5 = 32y^5 - 80y^4 + 80y^3 - 40y^2 + 10y - 1.$$

c) Sätt $a = b = 1$ i (1.44).

d) VL och HL är koeffficienten framför den term som inte innehåller s.

Index