1. <u>Lösning:</u> Laplacetransformen av ekvationen ger:

$$s^2\tilde{u} - s\overset{0}{\overset{\shortparallel}{u(0)}} - \overset{1}{\overset{\shortparallel}{u'(0)}} + s\tilde{u} - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{u(0)}} + \tilde{u} = \widetilde{e^{-t/2}}$$

Enligt räkneregel är $\widetilde{e^{-t/2}} = \dfrac{1}{s+1/2}$ vilket ger oss

$$(s^2+s+1)\tilde{u} - 1 = \frac{1}{s+1/2} \Rightarrow \tilde{u} = \frac{1}{(s^2+s+1)(s+1/2)} + \frac{1}{s^2+s+1}.$$

Vi kan skriva $s^2+s+1 = (s+1/2)^2 + 3/4$ och PBU ger:

$$\frac{1}{((s+1/2)^2+3/4)(s+1/2)} = \frac{4}{3}\frac{1}{s+1/2} - \frac{4}{3}\frac{(s+1/2)}{(s+1/2)^2+3/4}, \text{ så:}$$

$$\tilde{u} = \frac{4}{3}\frac{1}{s+1/2} - \frac{4}{3}\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} + \frac{1}{(s+1/2)^2+3/4}.$$

Räkneregler ger: $\dfrac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} = \widetilde{e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}$, $\dfrac{1}{(s+1/2)^2+3/4} = \widetilde{\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}$,

så $\tilde{u} = \widetilde{e^{-t/2}\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)}$.

Inversionformeln säger då att $u = e^{-t/2}\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$.

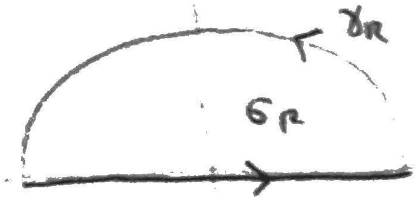
(Vi noterar att $u(0)=0$ samt $u'(0)=1$!)

<u>Svar:</u> $u = e^{-t/2}\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$

2. <u>Lösning:</u> Vi noterar först att

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]} g(z)\,dz \quad \text{där } g(z)=\frac{1}{z^2+z+1}.$$

Låt $\gamma_R(t) := Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$ och $\sigma_R := [-R,R]\cup\gamma_R$



Vi kan nu skriva

$$\underbrace{\int_{\sigma_R} g(z)\,dz}_{\text{räknar ut mha residykalkyl}} = \underbrace{\int_{[-R,R]} g(z)\,dz}_{\to \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+x+1}dx} + \underbrace{\int_{\gamma_R} g(z)\,dz}_{\text{felterm}}$$

Vi visar först att feltermen går mot noll.

$$\left|\int_{\gamma_R} g(z)\,dz\right| \underset{\Delta\int}{\leq} \max_{z\in\gamma_R}|g(z)|\,\pi R \leq \left[\,|z^2+z+1|^3 \underset{\text{omv. }\Delta\geq}{\geq} (|z|^2-|z|-1)^3 \underset{\text{på } \gamma_R}{=} (R^2-R-1)^3\,\right] \leq$$

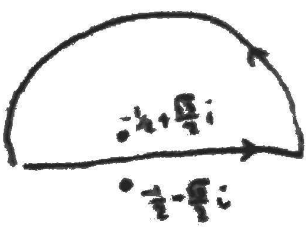
$$\leq \frac{\pi R}{(R^2-R-1)^3} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Nu räknar vi ut $\int_{\sigma_R} g(z)\,dz$.

$\frac{1}{(z^2+z+1)^3}$ är holo i $\mathbb{C}$ förutom i nollställena till z^2+z+1.

$z^2+z+1 = (z+1/2)^2+3/4 \Rightarrow$ nollställena är $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

varav endast $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \in \operatorname{int}(\sigma_R)$, $R>1$.



$$g(z) = \frac{1}{(z^2+z+1)^3} = \frac{1}{(z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3(z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3}$$ så enligt räkneregel är

$$\operatorname{Res}_{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} g = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3}\right)''\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{2}\left(\frac{12}{(z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^5}\right)\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} =$$

$$= \cancel{\tfrac{1}{2}}\frac{6}{(\sqrt{3}i)^5} = \frac{6}{9\sqrt{3}i} = \frac{2}{3\sqrt{3}i}.$$

Enligt residysatsen är nu $\displaystyle\int_{\gamma_R} g(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} g = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$

Eftersom feltermen går mot noll får vi alltså att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Svar: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$

3. Lösning: Vi använder Rouchés sats.

Vi hittar först antalet nollst. i $D(0,1)$.

Låt $f(z) := 2z^4$, $g(z) := -z^3 + \frac{1}{(z+3)^2}$. f har 4 nollst. i $D(0,1)$

Vi har att $|f(z)| = 2|z|^4 = 2$ på $C(0,1)$ medan

$$|g(z)| = \left|-z^3 + \frac{1}{(z+3)^2}\right| \underset{\Delta\leq}{\leq} |z|^3 + \frac{1}{|z+3|^2} \leq \left[\underset{\text{omv. }\Delta\geq}{|z+3| \geq} 3 - |z| = 2 \text{ på } C(0,1)\right] \leq$$

$$\leq 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4} < 2 = |f(z)| \text{ på } C(0,1).$$

Enligt Rouchés sats har $f+g$ lika många nollst. i $D(0,1)$ som f, dvs 4 st.

Vi hittar nu antalet nollst. i $D(0,1/3)$.

Låt $f(z) := \frac{1}{(z+3)^2}$, $g(z) := 2z^4 - z^3$. f har inga nollst. i $D(0,1/3)$.

$$|f(z)| \geq \left[|z+3| \leq |z|+3 = 3 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{10}{3} \text{ på } C(0,1/3)\right] \geq \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{9}{100} \text{ på } C(0,1).$$

$$|g(z)| = |2z^4 - z^3| \underset{\Delta\leq}{\leq} 2|z|^4 + |z|^3 = \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^3} = \frac{5}{81} < \frac{9}{100} \leq |f(z)|$$

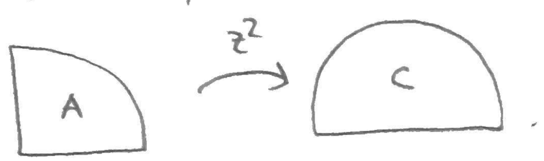
på $C(0,1/3)$ $\underset{\text{Rouché}}{\Longrightarrow}$ $f+g$ har lika många nollst. som f i $D(0,1/3)$, dvs inga. Vi noterar också att $f+g$ ej har några nollst. på $C(0,1/3)$ eftersom $|f+g| \geq |f|-|g| > 0$ där.

Det följer att $2z^4 - z^3 + \frac{1}{(z+3)^2}$ har $4-0=4$ nollst. i $A(0,1/3,1)$.

Svar: $2z^4 - z^3 + \frac{1}{(z+3)^2}$ har 4 nollst. i $A(0,1/3,1)$.

4. Lösning: Vi gör detta i två steg.

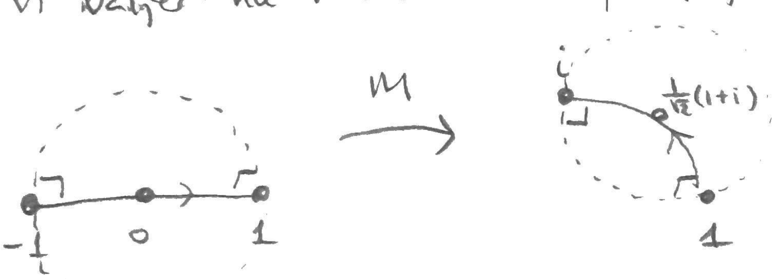
Först noterar vi att z^2 avbilder A bijektivt och konformt på halvcirkelskivan $C := \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$



Nu letar vi efter en Möbiusavbildning som tar C till B:

Notera att B begränses av cirklarna $C(0,1)$ & $C(1+i,1)$ och dessa skär varandra i rät vinkel i punkterna 1 & i, medan C begränses av $C(0,1)$ och den reella axeln, och att dessa skär varandra i rät vinkel i -1 & 1.

Vi väljer nu Mavb M på följande sätt:



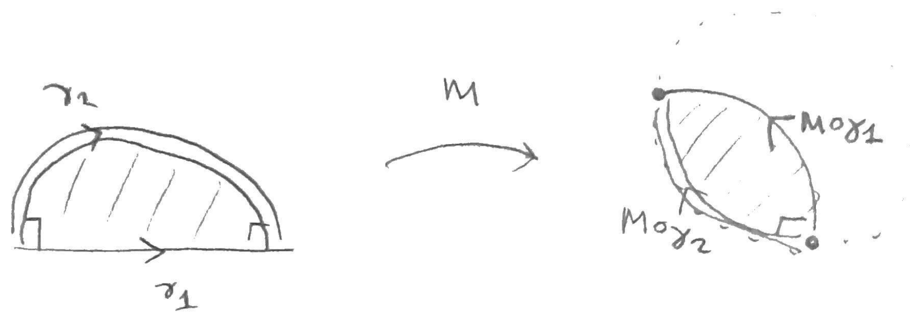
dvs

$M(-1) = 1$, $M(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $M(1) = i$.

Standardräkner ger att $M(z) = \dfrac{(\sqrt{2}-1)(1+i)z + (1+i)}{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-i)z + \sqrt{2}}$

Eftersom Mavb avbilder cirklar & linjer på cirkler el linjer får vi att $M(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = C(0,1)$.

Eftersom $C(0,1)$ skär $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ i räta vinkler och M är konform följer det att $M(C(0,1)) =$ cirkel el linje genom 1 & i som skär $C(0,1)$ i räta vinkler $= C(1+i,1)$



Om γ_1 & γ_2 är som på bilden ser vi också att tack vare M:s konformitet att $M\circ\gamma_2$ går till vänster om $M\circ\gamma_1$ från startpunkten 1. Det följer att $M(C)=B$.

Vi får alltså att sammansättningen

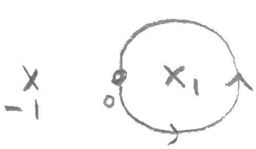
$$M(z^2) = \frac{(\sqrt{2}-1)(1+i)z^2+(1+i)}{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-i)z^2+\sqrt{2}}$$

är en bijektiv och konform avbildning från A till B.

5. <u>Lösning:</u> Vi noterar att $f(z) := \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}$ är holo i $\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$ och att $\mathrm{Res}_1 f = 1$, $\mathrm{Res}_{-1} f = -1$.

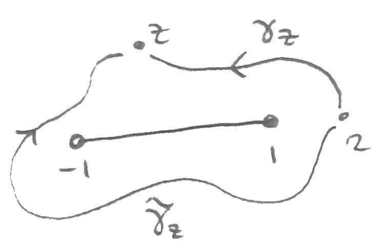
Vi får att $\int_{|z-1|=1} f(z)\,dz \overset{RS}{=} 2\pi i\,\mathrm{Res}_1 f = 2\pi i \neq 0$.

f kan därför ej ha primitiv F i $\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$ för isf skulle enligt sats $\int_{|z-1|=1} f\,dz = F(0)-F(0)=0$.



Vi visar nu att f har primitiv F i $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$.

Låt för varje $z\in\mathbb{C}\setminus[-1,1]$: $F(z) := \int_{\gamma_z} f\,dw$ där γ_z är någon st. gl. kurva i $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ från säg 2 till z:



Antag att $\tilde{\gamma}_z$ är någon annan st. gl. kurva i $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ från 2 till z.

$\gamma_z \cup (-\tilde{\gamma}_z)$ är då en st. gl. sluten kurva i $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$, och kommer därför vara homotop med $mC(0,2)$ där m är kurvans vindningstal. Vi får då att

$$\int_{\gamma_z} f\,dz - \int_{\tilde{\gamma}_z} f\,dz = \int_{\gamma_z\cup(-\tilde{\gamma}_z)} f\,dz \overset{CS}{=} m\int_{|z|=2} f\,dz \overset{RS}{=} m\,2\pi i\left(\mathrm{Res}_{-1} f + \mathrm{Res}_1 f\right) = 0$$

dvs $\int_{\gamma_z} f\,dz$ är oberoende av val av kurva!

Givet z,h låt $\gamma_h(t) := z+th$, $t\in[0,1]$. Vi får att

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{\int_{\gamma_z\cup\gamma_h} f\,dz - \int_{\gamma_z} f\,dz}{h} = \frac{\int_{\gamma_h} f\,dz}{h} = \int_{t=0}^{1} f(z+th)\,dt \xrightarrow[h\to 0]{} f(z)$$

som i beviset av existens av primitiv i enkelt sam. område.

Detta visar att f har primitiv i $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$.

6. <u>Lösning:</u>

Enligt sats kan f skrivas $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ i $D(0,1)$,

där $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Vi har också att $\overline{f(z)} = \overline{\sum_0^\infty a_k z^k} = \sum_0^\infty \overline{a}_k \overline{z}^k$.

På $C(0,1/2)$ är $z\overline{z} = |z|^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \overline{z} = \frac{1}{4z}$,

så $z\overline{f(z)} = z\sum_0^\infty \overline{a}_k \frac{1}{(4z)^k} = \sum_0^\infty \frac{\overline{a}_k}{4^k} z^{1-k}$ på $C(0,1/2)$.

Serien är även likformigt konvergent på $C(0,1/2)$ så

$$\int_{|z|=1/2} z\overline{f(z)}\,dz = \int_{|z|=1/2} \sum_0^\infty \frac{\overline{a}_k}{4^k} z^{1-k}\,dz \underset{\text{likf. konv.}}{=} \sum_0^\infty \frac{\overline{a}_k}{4^k} \int_{|z|=1/2} z^{1-k}\,dz =$$

$$= \left[\int_{|z|=1/2} z^{1-k}\,dz = \begin{cases} 2\pi i, & k=2 \\ 0, & k\neq 2 \end{cases}, \underline{\text{fnd. ex}} \right] = \frac{\overline{a}_2}{16} 2\pi i = \frac{\overline{f''(0)}\,\pi i}{16},$$

vilket skulle visas.