

kontinuitet definition

den 9 september 2020 08:22

domain.

DEFINITION

4

Continuity at an interior point

We say that a function f is **continuous** at an interior point c of its domain if

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

(BAMSE)

If either $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ fails to exist or it exists but is not equal to $f(c)$, then we will say that f is **discontinuous** at c .

BAMSE

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 2x + 1) \stackrel{\text{BAMSE}}{=} 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 2 - 2 + 1 = 1$$

är den kontinuität? $2 - 2 + 1 = 1$?

$f(x) = 1$ är kont. : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ A-22 problem 3-9

$f(x) = x$ är kont. : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ A-22

Combining continuous functions

f är kont. (i en punkt a) $\mathbb{I}$

g är kont. (" ") $\mathbb{I}$

SATS

dä : $f \pm g$ är (kont i punkt a) $\mathbb{I}$

$f \cdot g$ " "

$\frac{f(x)}{g(x)}$ är kont i alla $x \in \mathbb{I}$
der $g(x) \neq 0$

$$(f \circ g)$$

$$f(x) = 2x^2 - 2x + 1$$

f konst
 g konst
 $f+g$ konst.

1 konst i $\mathbb{R}$

x konst i $\mathbb{R}$

x^2 konst i $\mathbb{R}$

x^2 konst, 2 konst, $2 \cdot x^2$ konst

def (intuitivt): om man kan ~~ritar~~ rita grafen av funktionen f utan att lyfta pennen, då är funktionen kontinuerlig

Q: Om man kollar på likheten du visade för definition av kontinuitet, kan man säga att om både höger led och vänster led är odefinierad så är fortfarande likheten OK?

Svar: nej, jag skulle säga att likheten är inte ok
exempel:

- inte def = inte def; gör inte att jämföra saker som inte finns
- $\lim_{x \rightarrow a} f = +\infty$: man kan tänka ja; men vi kan inte säga / tänka att $f(a) = \infty$

Q: fast $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ är ju inte lika med $f(0)$, var det inte det som stod i boken precis?

Svar: 0 är inte inkluderad i definitionsområdet och därför behöver man inte tänka på det

Q: lim för $x \rightarrow 1$ i $(2x^2 - 2x + 1)$, du frågade om denna är

kontinuerlig eller inte men du svarade aldrig på frågan :)

Svar: Den är kontinuerlig. Man kan visa det med följande resonemang; (a) först visar man att $f(x)=c$ är kontinuerlig i $\mathbb{R}$; (b) sedan visar man att $f(x)=x$ är kontinuerlig i $\mathbb{R}$; från satsen om "egenskaper av kontinuitet" dvs hur man kan bygga kontinuerliga funktioner, visar man att $x \cdot x$ är kontinuerlig, etc och så småningom det går att visa att hela funktionen är kontinuerlig.

Q: Hej, kan du förklara hur duggapoängen fungerade igen? Fattade inte riktigt förra gången du förklarade det.

Svar: Ett exempel - ex: man får 22 poäng i möbius. det står i canvas att dugga är värt 1 p (tenta poäng). då får man 1 tenta poäng; man får 15 poäng i möbius, då får man $(15/22) \cdot 1$ tenta poäng

Q: Tas epsilon-delta upp i boken? i så fall vart? Svar: Adams, Appendix A-22

Continuous Functions

Consider the following definitions of continuity, which are equivalent to those given in Section 1.4.

DEFINITION

1

Continuity of a function at a point

A function f , defined on an open interval containing the point a , is said to be continuous at the point a if

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a);$$

that is, if for every $\epsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that if $|x - a| < \delta$, then $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

DEFINITION

2

Continuity of a function on an interval

A function f is continuous on an interval if it is continuous at every point of that interval. In the case of an endpoint of a closed interval, f need only be continuous on one side. Thus, f is continuous on the interval $[a, b]$ if

$$\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x)$$

for each x satisfying $a < x < b$, and

$$\lim_{t \rightarrow a^+} f(t) = f(a) \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow b^-} f(t) = f(b).$$

These concepts are illustrated in Figure III.1.

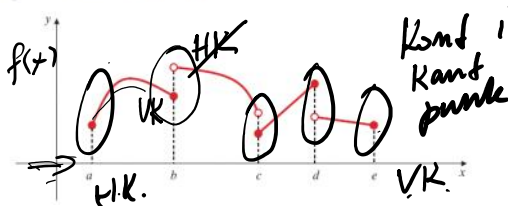


Figure III.1 f is continuous on the intervals $[a, b]$, (b, c) , $[c, d]$, and $(d, e]$

THEOREM

1

Combining continuous functions

- (a) If f and g are continuous at the point a , then so are $f + g$, $f - g$, fg , and, if $g(a) \neq 0$, f/g .
- (b) If f is continuous at the point L and if $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$, then we have

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(L) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right).$$

In particular, if g is continuous at the point a (so that $L = g(a)$), then $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(g(a))$, that is, $f \circ g(x) = f(g(x))$ is continuous at $x = a$.

- (c) The functions $f(x) = C$ (constant) and $g(x) = x$ are continuous on the whole real line.
- (d) For any rational number r , the function $f(x) = x^r$ is continuous at every real number where it is defined.

finns som problem i MS

lim.
problem
ADAMS

(d) For any rational number r , the function $f(x) = x^r$ is continuous at every real number where it is defined.

PROOF Part (a) is just a restatement of various rules for combining limits; for example,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(a)g(a).$$

Part (b) can be proved as follows. Let $\epsilon > 0$ be given. Since f is continuous at L , there exists $k > 0$ such that $|f(g(x)) - f(L)| < \epsilon$ whenever $|g(x) - L| < k$. Since $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$, there exists $\delta > 0$ such that if $0 < |x - a| < \delta$, then $|g(x) - L| < k$. Hence, if $0 < |x - a| < \delta$, then $|f(g(x)) - f(L)| < \epsilon$ and $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(L)$.

The proofs of (c) and (d) are left to the student in Exercises 3–9 at the end of this appendix.

lim definerad eller inte

den 9 september 2020 07:57

* def: $\lim f(x)$ finns
om det är en ändlig
tal

ex: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

* $\lim f(x)$ finns inte
men den går mot ∞

ex: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$

Exempel från boken ↗

FIMGM ∞

Infinite Limits

A function whose values grow arbitrarily large can sometimes be said to have an infinite limit. ~~Since infinity is not a number~~, infinite limits are not really limits at all, but they provide a way of describing the behaviour of functions that grow arbitrarily large positive or negative. A few examples will make the terminology clear.

EXAMPLE 6

(A two-sided infinite limit) Describe the behaviour of the function $f(x) = 1/x^2$ near $x = 0$.

Solution As x approaches 0 from either side, the values of $f(x)$ are positive and grow larger and larger (see Figure 1.17), so the limit of $f(x)$ as x approaches 0 *does not exist*. It is nevertheless convenient to describe the behaviour of f near 0 by saying that $f(x)$ *approaches* ∞ as x approaches zero. We write

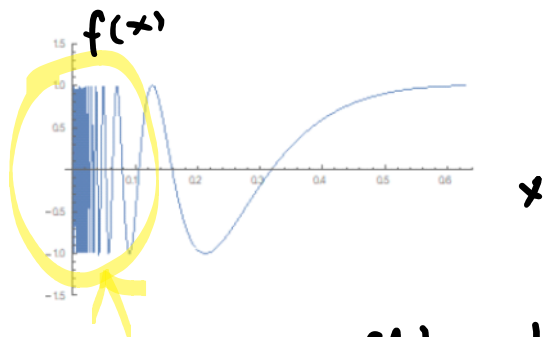
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Note that in writing this we are *not* saying that $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x^2$ *exists*. Rather, we are saying that that limit *does not exist because* $1/x^2$ *becomes arbitrarily large near* $x = 0$. Observe how the graph of f approaches the y -axis as x approaches 0. The y -axis is a **vertical asymptote** of the graph.

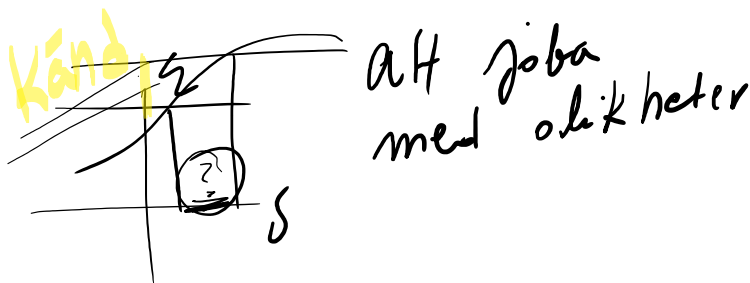
* gränsvärdet finns inte (på riktigt)
och inte på
grund att den är $+\infty$ eller $-\infty$;

kan hända att vi kan inte ens säga det.
 kan hända att vi kan inte ens säga
 hur funktionen beter sig.

Exempel: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$



den oscillerar väldigt här

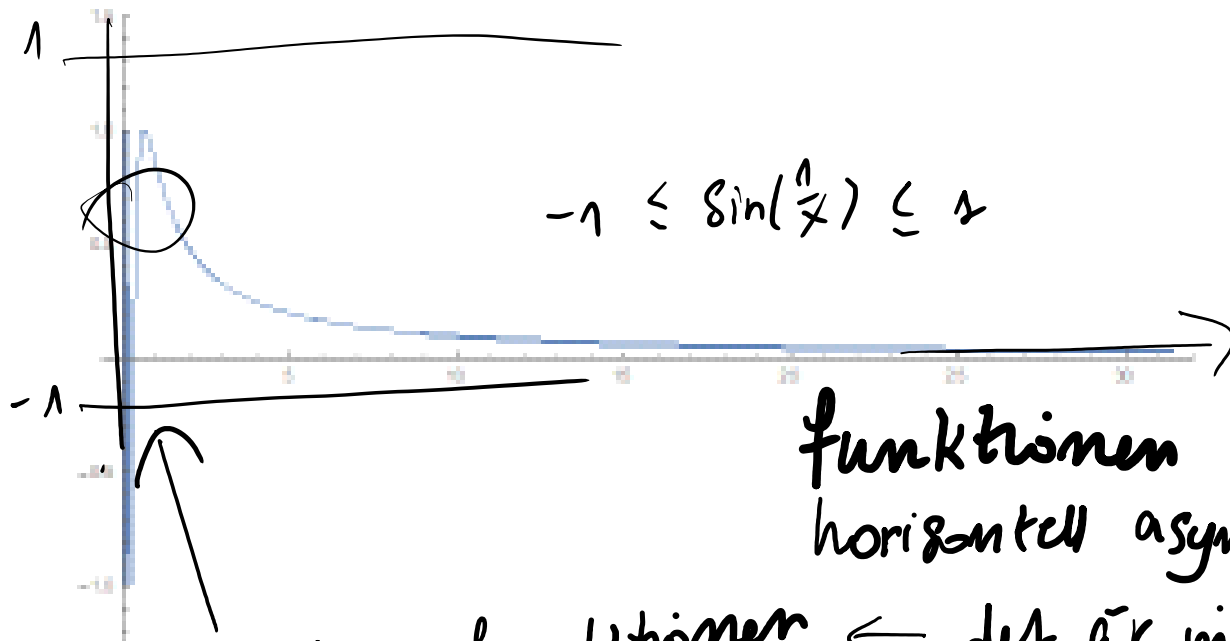


Q: om $x \rightarrow 0$ i $1/x$ blir väl det oändligt stort eftersom den aldrig blir noll?

Svar: man skulle kunna tro att det är så, men så är det inte. här är det viktigt att fatta vad koncept att ett öppet intervall betyder. det betyder just det att kan vara hur nära kanten man vill, men inte just i kanten. detta betyder att vi kommer alltid att ha x som inte är 0. när man närmar sig nollan, visst då blir $1/x$ kolossalt stort, men aldrig oändlig.

en funktion som har inte gränsvärde i $x \rightarrow 0$

den 9 september 2020 08:14



den här funktionen har ingen vertikal asymptot

funktionen har en horisontell asymptot

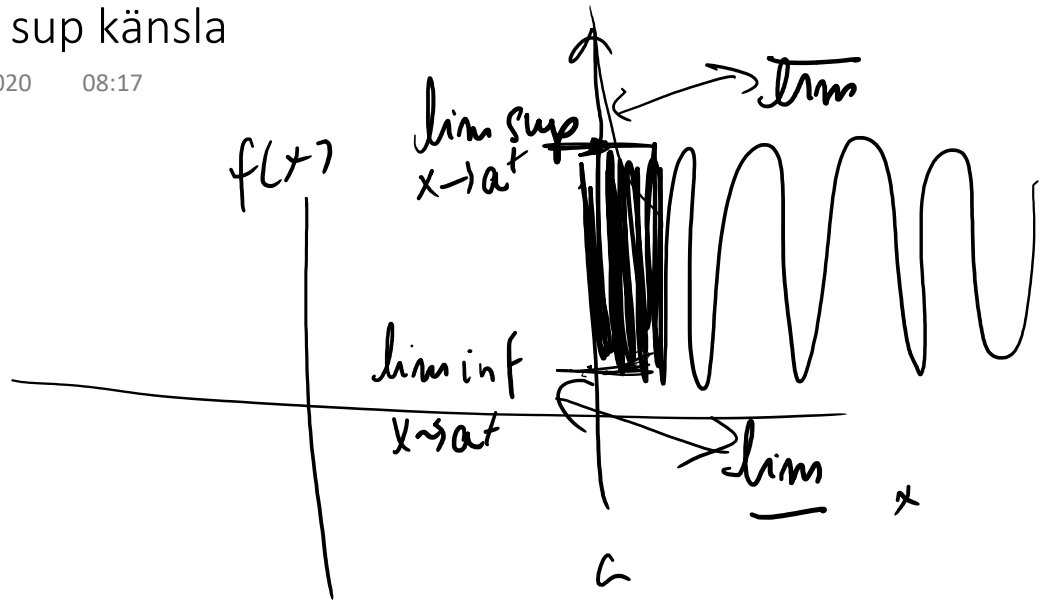
← det är inte så att

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

~~$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$~~

lim inf lim sup känsla

den 9 september 2020 08:17



$$\underbrace{\limsup \neq \liminf}_{\lim \text{ finns inte}} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\limsup = \liminf \\ \Downarrow \\ \lim \text{ finns.}$$

när limsup och liminf går mot oändlighet

den 9 september 2020 08:19



formalia kring kontinuitet | lite mera detalj

den 9 september 2020 08:28

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

def $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$$

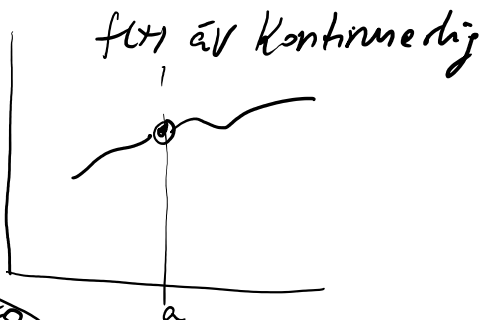
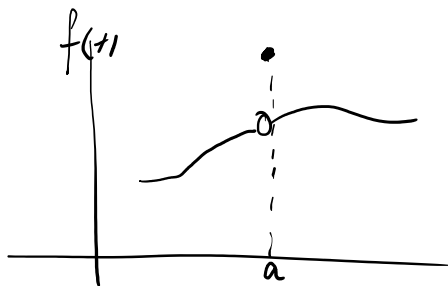
$$L \rightarrow f(c)$$

$$a \rightarrow c$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + e^{x^2})^{1/x^2}$$

x	$\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^2}$

Ex: detta $f(x)$ är inte kontinuerlig i $x=a$



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ A & x = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad D\tilde{f} = \mathbb{R}$$

är den kontinuerlig?



$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(a) helt $\mathbb{R}$

(b) inte helt $\mathbb{R}$

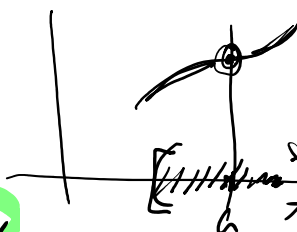
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \frac{1}{c} = f(c)$$

(a) finus
(b) finus
rik

(a) ja, kont

(b) nej, inte kont
li

* Kontinuitet i en inre punkt

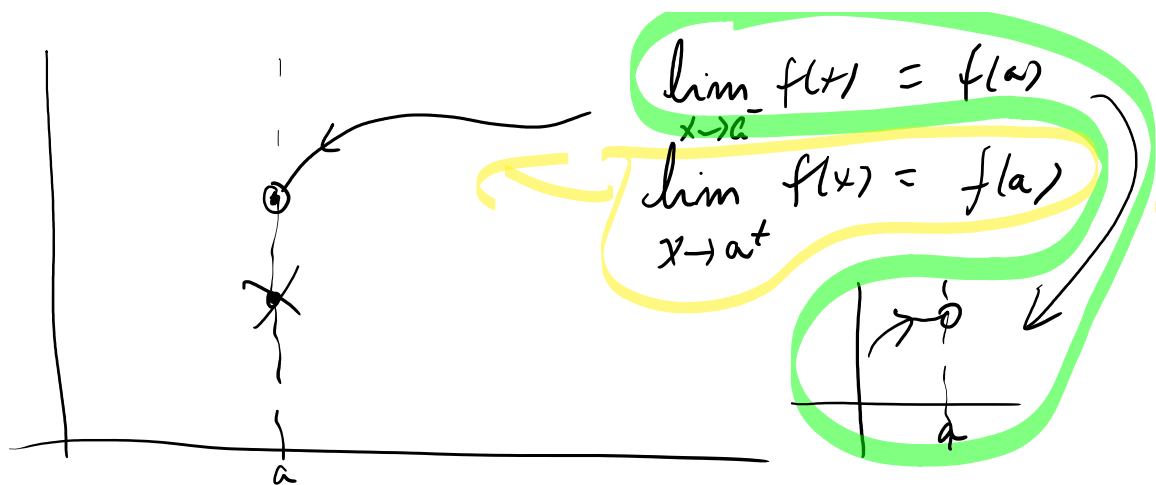


$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

tvärsidig

* Vänster höger kontinuitet; $f(x)$ är högerkontinuerlig i a om

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$



SATS (ADAMS)

Funktionen f är
kontinuerlig i en
inre punkt a

$\Leftrightarrow$

den är både
höger och vänster
kontinuerlig i a

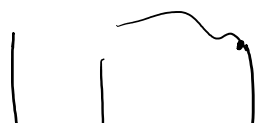
* $f(x)$ är kontinuerlig i en intervall I
om den är kontinuerlig i varje $a \in I$

* $f(x)$ är kont. i en kombination av
intervaller om den är kont i alla
sub-intervaller $[k; I = I_1 \cup I_2] \Leftarrow [k; I_1], [k; I_2]$

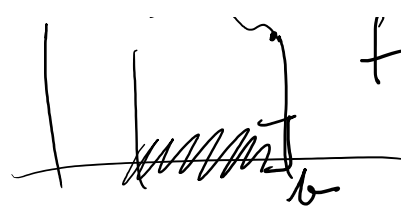
* att vara kontinuerlig i en kant punkt:



f är kontinuerlig i a (kant
punkt) om den är höger konti-
nuerlig



f är kont i b (höger kant
punkt) om den är vänster


 f är kont i b (någon kant punkt) om den är vänster kontinuerlig i b

* om f är kontinuerlig i kant punkt då säger vi bara att den är kontinuerlig

- Kontinuitet i inre punkt / tvåsidig
- Vänsterkontinuitet / Högerkontinuitet
- Kontinuitet i kantpunkt
- Kontinuitet i en interval

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

tvasidig kont.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

höger kont.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Vänsterkontinuitet

