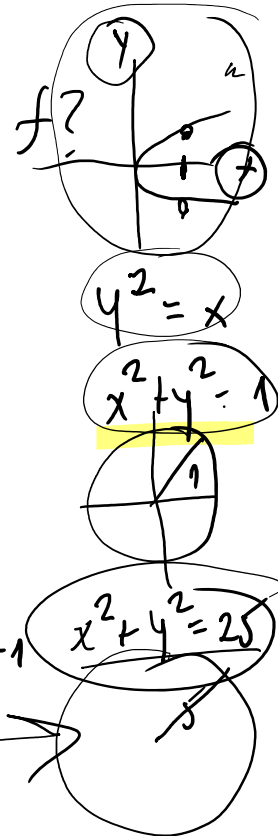
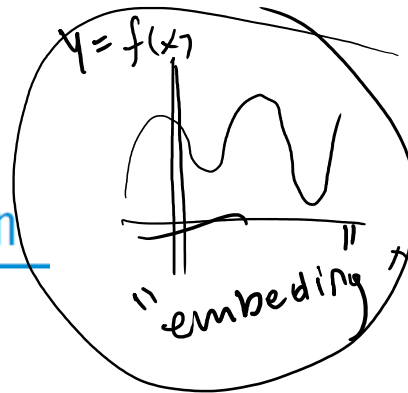


$f \Rightarrow$ ^{ntagen} graf
 $\Leftarrow$

2.9

Implicit Differentiation



We know how to find the slope of a curve that is the graph of a function $y = f(x)$ by calculating the derivative of f . But not all curves are the graphs of such functions. To be the graph of a function $f(x)$, the curve must not intersect any vertical lines at more than one point.

Curves are generally the graphs of equations in two variables. Such equations can be written in the form

$$F(x, y) = 0,$$

where $F(x, y)$ denotes an expression involving the two variables x and y . For example, a circle with centre at the origin and radius 5 has equation

$$x^2 + y^2 - 25 = 0,$$

$$2x + y = 1$$

$$F(x, y) = 2x + y - 1$$

$$y = 1 - 2x$$

$$f(x) = 1 - 2x \Leftarrow F(x, y) = 0$$

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 25$$

so $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25$ for that circle.

Sometimes we can solve an equation $F(x, y) = 0$ for y and so find explicit formulas for one or more functions $y = f(x)$ defined by the equation. Usually, however, we are not able to solve the equation. However, we can still regard it as defining y as one or more functions of x *implicitly*, even if we cannot solve for these functions *explicitly*. Moreover, we still find the derivative dy/dx of these implicit solutions by a technique called **implicit differentiation**. The idea is to differentiate the given equation with respect to x , regarding y as a function of x having derivative dy/dx , or y' .

$$F(x, y) = 0 \Rightarrow y = \dots x \dots \quad (f(x))' = \dots (x \dots)'$$

implicit funktion definieras med

$$F(x,y)=0 \Rightarrow y=f(x)$$

Exempel



(1) graf G

(2) välj delen
av G

som för
en funktion

$$y^2 - x = 0 \Rightarrow y = \pm \sqrt{x}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

$$\sin y - x = 0 \Rightarrow x = \sin y \quad | \quad \arcsin$$

$$\arcsin x = \arcsin(\sin y) = y$$

Skulle du kunna ge något exempel när y inte kan lösas ut?

$$F(x,y)=0$$

$$y = \arcsin x$$

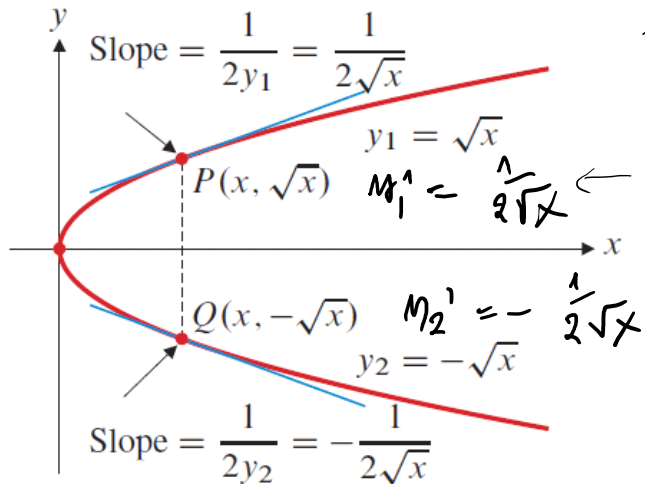
EXAMPLE 1

Find dy/dx if $y^2 = x$.

Solution The equation $y^2 = x$ defines two differentiable functions of x ; in this case we know them explicitly. They are $y_1 = \sqrt{x}$ and $y_2 = -\sqrt{x}$ (see Figure 2.34), having derivatives defined for $x > 0$ by

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\frac{d}{dx} \mid$ VS = HS $y=f(x)$
leddjeregeln



(The Chain Rule gives $\frac{d}{dx} y^2 = 2y \frac{dy}{dx}$.)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (y^2) &= \frac{d}{dx} (x) \\ 2y \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2y} \end{aligned}$$

$$\frac{dy^2}{dx} = \frac{dy^2}{dy} \frac{dy}{dx} = 2y \cdot \frac{dy}{dx}$$

Figure 2.34 The equation $y^2 = x$ defines two differentiable functions of x on the interval $x \geq 0$

Räkna sama derivata med differential klockan

✓ $x \longleftrightarrow y$ (gamla $F(x,y)=0$ alt)

1 1

vet $1+dx \longleftrightarrow 1+dy$ (nytt)

$F(1+dx, 1+dy)=0$ nytt $(y+dy)^2 = x+dx$

fn svarar

$(y+dy)^2 = x+dx$

"pedagogisk utflykt"

$y^2 + 2y(dy) + dy^2 = x+dx$; $y^2 = x$; $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\cancel{y^2} + 2y \cancel{dy} + \cancel{dy^2} = \cancel{x} + dx \quad ; \quad y^2 = x$$

- jag trodde $y^2 + x^2 = 1$ ledde till $2y \cdot y' = -2x$ sant!
- Är det ett "måste" att ignorera dy^2 eller är det bara enklare? $0 + 0^2 = 0$
 - Hur kunde du stryka dy^2 ?? $0^2 = 0$ inte sant att det är 0
 - Är $dy^2 = dx$? nej
 - så du kan ta bort den för att när dy går mot 0 blir dy^2 orelevant? ✓

jag fattar fortfarande inte hur du fick dx och dy separat och vart du fick dy^2 ifrån

lång process

$$2y dy = dx \quad | : dx \Rightarrow 2y \left(\frac{dy}{dx} \right) = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

$$y^2 = x \quad 1^2 = 1 \quad (x, y) = (1, 1) \text{ är en lösning}$$

$$(1 + dy)^2 = 1 + 0.001$$

$$y_{\text{näst}} = 1 + dy$$

$$\text{välj } dx = 0.001$$

$$x_{\text{näst}} = x_{\text{gamla}} + dx = 1 + dx$$

ex:

dy	dy^2	$\cancel{dy} + dy^2$	
1	1	$\cancel{1} + 1$	
0.1	0.01	$\underline{0.1} + \underline{0.01}$	10 gånger mindre
0.01	0.0001	$\underline{0.01} + \underline{0.0001}$	100 gånger mindre
0.001	0.000001	$\underline{0.001} + \underline{0.000001}$	1000 gånger mindre
...	...	...	...
0	0	$\cancel{0} + \cancel{0^2}$	$0^2 < 0$ $0^2/0 = 0$

○ inte samma som tom mängd $\emptyset$

Är det sant att $dy^2 \neq dx$, det är

intc cant. Varför?

$$\frac{\pi}{2} \neq 0 \in 0 \neq 0$$

$x \approx$ tid
dL

LM: att kunna
lösa sådana
problem

Ekvationen

$$x^2 + x = x^3 y + x^4 y^4$$

$$\begin{cases} 1^2 + 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1.1^2 + 1.1 = 1.1 \cdot y_2 + 1.1 \cdot y_2^4 \end{cases}$$

ungefär formel för den.

$$(1+dx)^2 + 1+dx = (1+dx)(1+dy) + (1+dx)^3 (1+dy)^4$$

$dx = 0.1$ $dy = ?$

hur löser man för dy:

man kan börja med att dela med $(1+dx)$

kanske kan man göra som i det tidigare exemplet att man utvecklar uttrycken och sedan stryker allt som är upphöjt i 2 eller högre



man kunde, men
det kommer inte att
rädda 100%

har lösningen $x=1$, $y=1$. Om x ändras

från 1 till 1.1 hur mycket behöver man
justera y ?

$$x_2 = 1 + dx = 1 + 0.1 = 1.1$$

$$y_2 = 1 + dy \quad dy = ?$$

Linjär approximation. $\frac{dy}{dx} = y'$ ref. punkt.

$$dy = y' \cdot dx \rightarrow \Delta x, \Delta y : \Delta y \approx (y') \Delta x$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y$$

$$x^2 + x = x^3 y + x^4 y^4 \quad \left| \frac{d}{dx} \right.$$

$$2x + 1 = x^3 y' + x y' + (x^3)' y^4 + x^3 (y^4)'$$

$(y^4)' = 4y^3 y'$

$$2x + 1 = y + x y' + 3x^2 y^4 + x^3 4y^3 y'$$

$$x=1, y=1$$

$$2 \cdot 1 + 1 = 1 + 1 y' + 3 \cdot 1^2 \cdot 1^4 + 1^3 \cdot 4 \cdot 1^3 y' \quad \frac{dy}{dx}$$

$$2 + 1 = 1 + y' + 3 + 4 y'$$

$$(2+1-1-3) = y' + 4y' = 5y'$$

$$y' = \frac{-1}{5} \quad y_2 = y_1 + y' \Delta x = 1 + \left(-\frac{1}{5}\right) 0.1$$

SAMMANFATTNING:

allt du gjorde var att räkna ut y' baserat på kända x och y och sedan bara ändrat x ...

$$\frac{d}{dx} | y \cdot x = x^3 + x y^2 \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$(1) \quad \frac{d}{dx}(y \cdot x) = \frac{d}{dx}(x^3 + x y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot x + y \frac{dx}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(x y^2)$$

$$y' \cdot x + y \cdot 1 = 3x^2 + \frac{d}{dx}(x y^2)$$

$$y'x + y = 3x^2 + 1 \cdot y^2 + x \cdot 2y \cdot y'$$

$$(2) \quad y'x - x \cdot 2y \cdot y' = 3x^2 + y^2 - y$$

$$y'(x - 2xy) = 3x^2 + y^2 - y$$

$$y' = \frac{3x^2 + y^2 - y}{x - 2xy}$$

Notera att (i princip) vi vet
x och y.

är det ett
problem att vi
har y på
höger sida?

Om man vill veta y' för ett specifikt x så borde vi ju ändå
redan känna till y?

Notation: vi skriver inte $(\cos x)'$ om det är uppenbart
att derivatan är över x

EXAMPLE 3

Find $\frac{dy}{dx}$ if $y \sin x = x^3 + \cos y$.

$$\frac{d}{dx} | y \sin x = x^3 + \cos y$$

To find dy/dx by implicit
differentiation:

To find dy/dx by implicit differentiation:

1. Differentiate both sides of the equation with respect to x , regarding y as a function of x and using the Chain Rule to differentiate functions of y .

2. Collect terms with dy/dx on one side of the equation and solve for dy/dx by dividing by its coefficient.

$$(y \sin x)'_x = (x^3 + \cos y)'_x$$

$$y'_x \sin x + y (\sin x)'_x =$$

$$(x^3)'_x + (\cos y)'_x$$

$$(x^3)'_x = 3x^2 \quad (\cos y)'_x = -\sin y \cdot y'_x$$

$$\frac{d \cos y}{dx} = \frac{d \cos y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$y'_x \sin x + y \cos x = 3x^2 + (\cos y)'_x$$

$$- \sin y y'_x$$

$$(\cos y)'_x = (\cos y)'_y \cdot y'_x = -\sin y y'_x$$

$$y'_x \sin x + y \cos x = 3x^2 - \sin y y'_x$$

$$y'_x \sin x + \sin y y'_x = 3x^2 - y \cos x$$

$$y'_x (\sin x + \sin y) = 3x^2 - y \cos x$$

$$y'_x = \frac{3x^2 - y \cos x}{\sin x + \sin y}$$

referens punkten (x, y) är känd!

hitta tangenten i en punk för en implicit funktion

den 16 september 2020 07:53

EXAMPLE 2

Find the slope of circle $x^2 + y^2 = 25$ at the point $(3, -4)$.

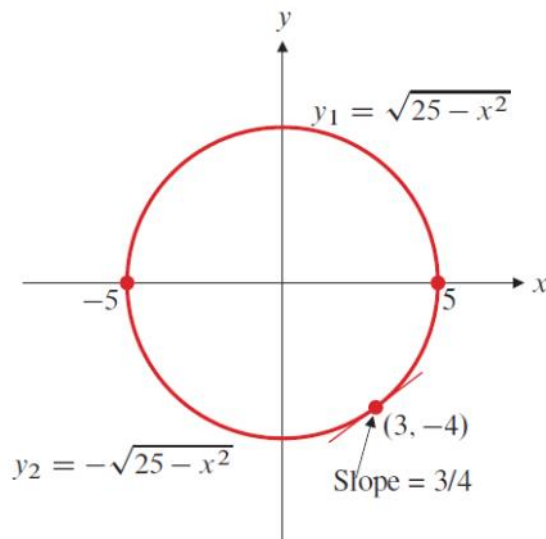


Figure 2.35 The circle combines the graphs of two functions. The graph of y_2 is the lower semicircle and passes through $(3, -4)$