dugga 2, problem 4, sammanfattning

den 17 september 2020 10:00

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+bx+a}{(x-1)^2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{går det att välja} \\ a, b \text{ så att g.v.} \\ \text{finns?} \end{array} \right\}$$

$b=3,\ a=?$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x+a}{(x-1)^2} = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 1} \dots = \frac{\text{tal}}{0^2} = \infty \\ = (x-1)^2 \lim \frac{\dots}{(x-1)^2} = \frac{0^2}{0^2} = 1 \\ \quad \| \\ (x-2)^2 \dots \frac{\text{tal}}{0^2} \\ (x-x_1)(x-x_2) \end{array} \right.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x-1)^2} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_1, x_2 \neq 1 \end{array} \right. \quad \frac{\cancel{(x-1)}(x-x_2)}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{\text{tal}}{0}$$

$$\frac{(x-5)(x-7)}{(x-1)^2} = \frac{\text{tal}}{0^2}$$

$$\frac{0 \cdot \text{tal}}{0^2} \qquad \frac{0^2}{0^2} \qquad \frac{\text{tal}}{0^2}$$

$-4, 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x+a}{(x-1)^2} = \left\{ \begin{array}{l} a = -4 \\ x^2+3x-4 = (x+4)(x-1) \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+4)\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 1} \frac{x+4}{x-1} = \frac{5}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{x^2+3x+a}^{p(x)}}{x-1} = \left\{ a=-4,\ p(1)=0 \Rightarrow p(x) = (x-1)Q \right\}$$

$Q(1) \neq 0 \quad Q(x) = x+4$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)^1} Q(x)}{\cancel{(x-1)^1}} = Q(1)$$

$\lim_{x\to 1}$

$b=2$

x^2+2x+a går det att

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x + a}{(x-1)^3}$$

- går det att
- hitta a s.a g.v finns?

(a) ja (b) nej

Hade för mig att en högre exponent i nämnaren skulle bli en sned asymptot. Mindes uppenbarligen fel :P

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

$$f(x) \sim 3x + 2 \quad x \to \infty$$

nämnaren är en tredjegradare så det är omöjligt att bryta ut (x-1)^3 från täljaren

högre exponent i nämnaren, så oavsett vad vi väljer lär en "nolla" hamna i nämnaren och alltså gå mot oändligheten? för svaret b

$$\frac{P_2(x)}{(x-1)^3} \sim \frac{0^2}{0^3} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x \to 1$

$x - 1 \to 0$

$$y = x^2 + bx + c$$

hur många

vad är etteret att att ändra b förstår

(a) jag vilka/vet från tidigare

(b) nej, jag har sett detta just nu

derivata av y=1+x^(3/2);y=x^(3/2)

den 17 september 2020 10:32

bakgrund

$(f+g)' = f' + g'$

$(3/2)\cdot(x^{(1/2)})$

$y = 1 + x^{3/2}$ $\quad y' = 1' + (x^{3/2})' = (3/2)x^{(1/2)} = \frac{3}{2}x^{1/2}$

problem: $y = x^{3/2}$ $\quad |^2$ eller $|\,^2$

Vad är y'

$y^2 = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 = x^{\frac{3}{2}\cdot 2} = x^3$

$y^2 = x^3$ | I.D.T: VS = HS, $\frac{d}{dx}$VS = $\frac{d}{dx}$HS

$(y^2)'_x = (x^3)'_x \iff \frac{dy^2}{dx} = \frac{dx^3}{dx}$

$(y^2)'_y \cdot (y)'_x = 3x^2$ $\quad y = \ldots$ $\quad F(x,y) = 0$

$\ldots y \ldots x \ldots = 0$

$2y \cdot y' = 3x^2$

I.D. högre sidan har man x och y

$y' = \ldots x \ldots y \ldots$

$y' = \frac{3x^2}{2y}$

$y = x^{3/2}$

$y' = \frac{3x^2}{2 \cdot x^{3/2}} = \frac{3}{2}x^{2-\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}x^{\frac{4-3}{2}} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

Hur ser man att (y^2)' (litet x) är en sammansatt funktion?

$(y^2)'_x = \frac{d}{dx}(y(x)^2) \cdot y_1$ $\quad y(x)$ kv. $\rightarrow$ kv^2

$y = y(x) = f(x)$

$(\ldots x \ldots)' = d(\ldots x \ldots)$

Fattar inte notationen när du skriver ex: (y)'x
(x'et är litet) → "subscript"

$(\ldots y \ldots x)'_2$ = här vet vi inte vad man deriverar över

$\frac{d}{dx}$

Varför använder du implicit derivata istället för bara potensregeln direkt?

för att bevisa den

$y = x^{n/m} \quad |^m$

$y^m = x^n \quad | \frac{d}{dx}$

$m y^{m-1} y' = n x^{n-1}$

$y' = \frac{n x^{n-1}}{m y^{m-1}}$

$y = x^{n/m} \rightarrow y' = \frac{n}{m} \frac{x^{n-1}}{(x^{\frac{n}{m}})^{m-1}}$

$\Leftarrow$

$y' = \frac{n}{m} \frac{x^{n-1}}{x^{\frac{n}{m}(m-1)}}$

$= \frac{n}{m} x^{n-1-\frac{n}{m}(m-1)}$

$= \frac{n}{m} x^{n-1-n+\frac{n}{m}}$

$= \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$

Potens regel bevis

$r \in \mathbb{R}$ definieras som

$r = \lim_{\substack{x \to r \\ x \in \mathbb{Q}}} x$

$r = \lim r_n$

varför inte bara tänka sig bråk som decimaltal? med andra ord typ som heltal?

$\pi = 3.14159265\ldots$

$\pi_1 = 3.000000\ldots$

$r_n \in \mathbb{Q}$ $\pi_2 = 3.1000\ldots$ 31/10

$\pi_3 = 3.1400\ldots$ 314/100

$$r = \lim_{n\to\infty} r_n$$

$$\pi_n = \underbrace{3.1415926\ldots}_{n} \,\vdots\, 00000$$

$$y = x^{n/m} \Rightarrow y' = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$$

$$y = x^{r_n} \Rightarrow y' = r_n x^{r_n - 1} \qquad r_n \in \mathbb{Q} \quad \Big| \lim_{n\to\infty}$$

$$y' = \lim_{n\to\infty}\left(r_n x^{r_n - 1}\right)$$

$$= r x^{r-1}$$

Derivata bevis för $(\sin x)' = \cos x \Rightarrow (\cos x)' = -\sin x$

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad f(x) = \sin x$$

S. d.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

(1) (0) (1)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h - \sin x + \cos x \sin h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right]$$

$$= \sin x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{(b)\ 0} + \cos x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{(a)\ 1}$$

(a) Visa att $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

(a) Visa att $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

(b) Visa att $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$

$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$

derivata av cos

den 17 september 2020 12:12

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}\cos x + \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x \quad \Big| \quad \frac{d}{dx} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \left\{ u = \frac{\pi}{2}+x \right\} = \quad \frac{du}{dx} = 1$$

$$= \frac{d\sin u}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \cos u \cdot 1$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot 1$$

$$= \cos\frac{\pi}{2}\cos x - \sin\frac{\pi}{2}\sin x$$

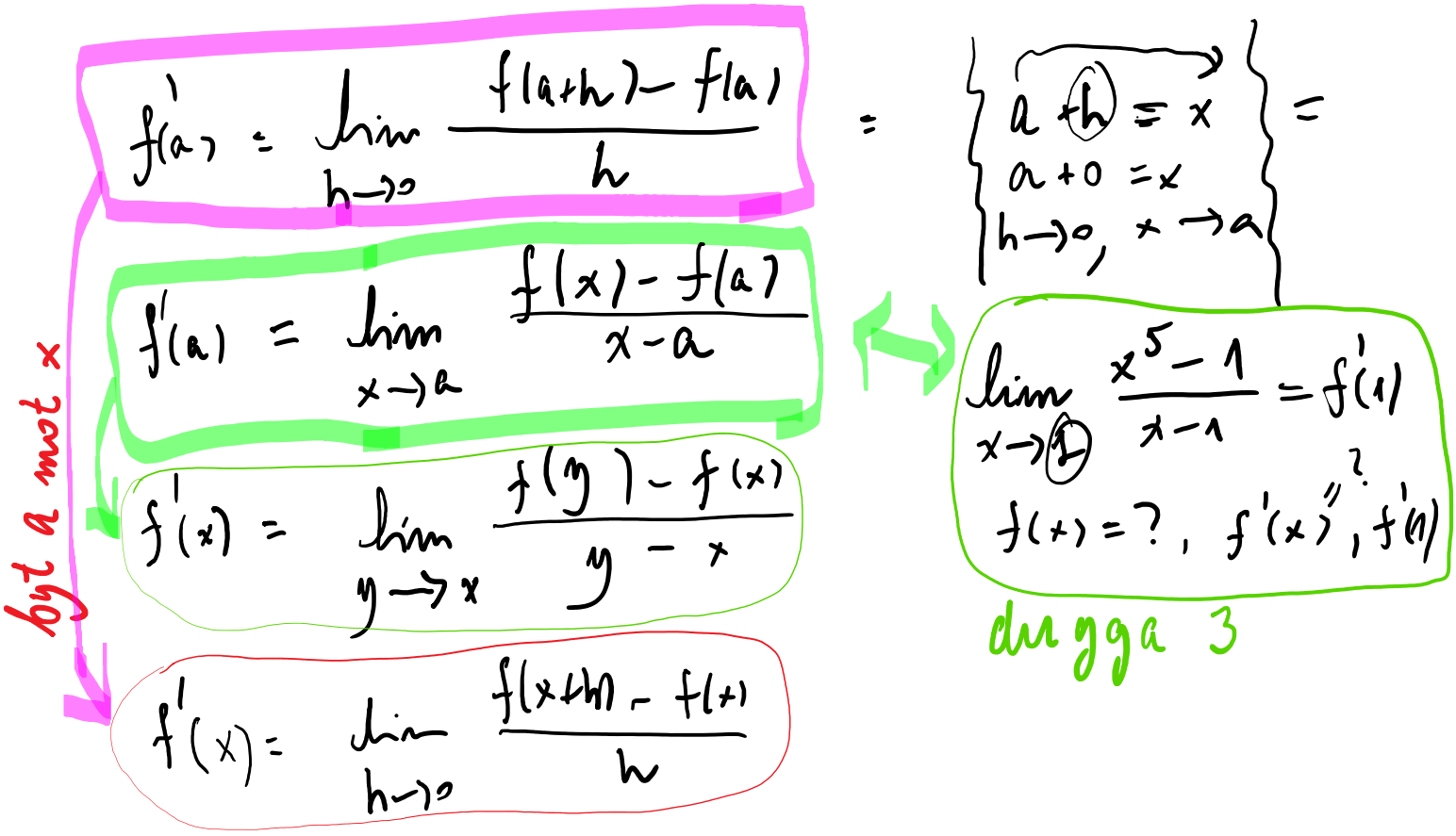
$$= 0\cdot\cos x - 1\cdot\sin x$$

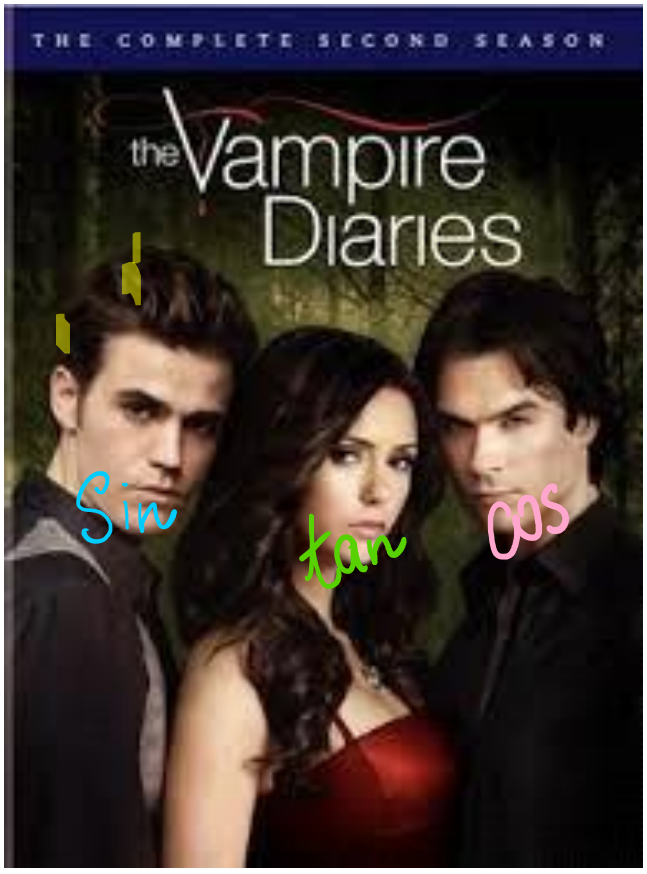
$$= -\sin x$$

olika sätt att definiera derivata: relaterad till en dugga problem

den 17 september 2020 11:21

det är bra att kunna olilka sätt att definiera derivata





$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

lim sinx/x = 1

den 17 september 2020 11:54

2.5 Derivatives of Trigonometric Functions

THEOREM 8

An important trigonometric limit

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \qquad \text{(where } \theta \text{ is in radians).}$$

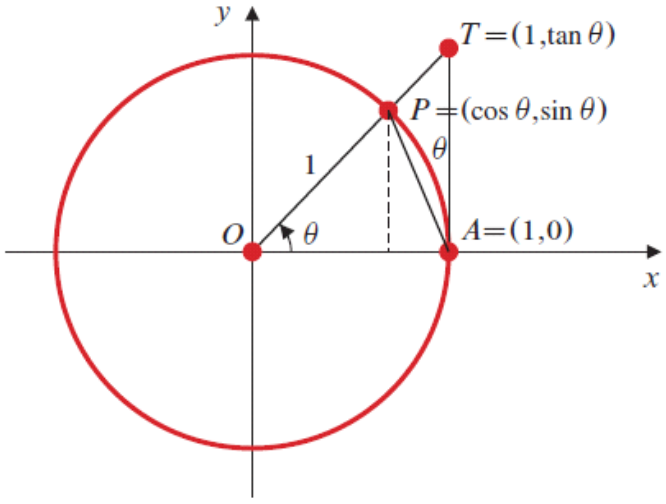


Figure 2.21 Area $\triangle OAP$ < Area sector OAP < Area $\triangle OAT$

Area $\triangle OAP$ < Area sector OAP < Area $\triangle OAT$

$$\text{Area } \triangle OAP = \frac{1}{2}(1)(\sin\theta) = \frac{\sin\theta}{2},$$

$$\text{Area } \triangle OAT = \frac{1}{2}(1)(\tan\theta) = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta}.$$

$$\frac{\sin\theta}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\sin\theta}{2\cos\theta}$$

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}.$$

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$$

THEOREM 4

The Squeeze Theorem

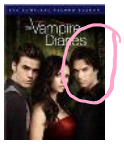
Suppose that $f(x) \le g(x) \le h(x)$ holds for all x in some open interval containing a, except possibly at $x = a$ itself. Suppose also that

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L.$$

Then $\lim_{x \to a} g(x) = L$ also. Similar statements hold for left and right limits.

lim (cos h-1)/h=0

den 17 september 2020 12:01



EXAMPLE 1 Show that $\lim_{h\to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0.$

$\cos\left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right)$

Solution Using the half-angle formula $\cos h = 1 - 2\sin^2(h/2)$, we calculate

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{2\sin^2(h/2)}{h} \qquad \text{Let } \theta = h/2.$$

$$= -\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}\,\sin\theta = -(1)(0) = 0.$$