

W5 - RÖ1 derivata tillämpningar

approximationer: linjär, med polynom, kring ändlig x , kring oändlig x , återkoppling till gränsvärdena; notera att alla gråa kommentarer kommer inte att vara tillgängliga på tentan. de finns nu enbart för att underlätta övningen.



[Brook Taylor](#)

en dugga problem

- Vi betraktar en funktion $f(x)$ so vi vet inte hur är det definierat exakt, men vi vet att $f'(3) = 5$. Hur mycket är $\frac{d}{dx} f(2x^2 - 2x + 3)$ i $x = 1$?
Frågan går att korta ner till $\frac{d}{dx} f(2x^2 - 2x + 3)|_{x=1} = ?$ Egentligen, frågan är om vi definierar $h(x) = f(2x^2 - 2x + 3)$, med $f(x)$ inte helt specificerad, har vi tillräcklig information om f för att kunna räkna $\frac{dh(x)}{dx}|_{x=1} = h'(1)$? Det svåra är att inse hur man skall använda det vi vet om f , nämligen att $f'(3)$ är känd, för att hitta $h'(1)$. Använd kedjeregeln för derivatan av $h(x) = f(g(x))$ med $g(x) = 2x^2 - 2x + 3$: $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ och $h'(1) = f'(g(1))g'(1)$.

typiska tenta frågor av G karaktären

- $f(x) = ax + b$ för $x < 0$ och $f(x) = x^2 + 3x + 1$ för $x \geq 0$. Går det att välja konstanter a och b så att $f(x)$ är deriverbar i hela R ?
Egentligen, frågan är går det att definiera a och b så att $f(x)$ är deriverbar i $x = 0$? Funktionen är deriverbar (och kontinuerligt) i intervallerna $(-\infty, 0)$ och $(0, +\infty)$ för att $f(x)$ är definierat som en polynom i dessa intervaller.
- $f(x) = ax^2 + b$ för $x < \frac{\pi}{2}$ och $f(x) = \sin 2x$ för $x \geq \frac{\pi}{2}$. Går det att välja konstanter a och b så att $f(x)$ är deriverbar i hela R ?
Egentligen, frågan är går det att definiera a och b så att $f(x)$ är deriverbar i $x = \frac{\pi}{2}$? Funktionen är deriverbar (och kontinuerligt) i intervallerna $I_1 = (-\infty, \frac{\pi}{2})$ och $I_2 = (\frac{\pi}{2}, +\infty)$ för att $f(x)$ är definierat som en polynom i I_1 och $\sin 2x$ i I_2 , bägge två deriverbara och kontinuerliga i hela R .

en typisk tenta fråga av VG karaktären

- Betrakta $f(x) = \frac{ax^2+bx}{x-1}$. Går det att definiera a , b och $f(1)$ så att $f(x)$ är deriverbar i hela R ? Detta är en rationell funktion. Sats: Vi vet att om nämnaren i $f(x) = g(x)/h(x)$ är inte noll i en intervall, då är $f(x)$ kontinuerlig och deriverbar i intervallet. I just detta fall är bägge $h(x)$ och $g(x)$ polynomer som är deriverbara i hela R , bara att $h(x) = x - 1$ har en noll punkt i $x = 1$. Enligt satsen är $f(x)$ deriverbar och kontinuerlig i alla andra punkter, alltså i $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Egentligen, frågan är om det går det att definiera a , b och $f(1)$ så att $f(x)$ är kontinuerlig och deriverbar i $x = 1$.

typiska tenta frågor övning (VG)

Taylor utveckla till 4:e grad kring $x = 0$

funktionerna under (a) och (b):

(a) $f(x) = \sin(ax^2)$

(b) $f(x) = \cos(ax^2)$

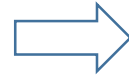
Du kan antingen göra direkt användning av Taylor sats (alltså tokderivera, krångligt men det går), eller vissa att (men man måste visa hur dessa träder fram)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

och argumentera hur du kan använda dessa för att lösa problemet.

Det ger extra poäng om man skriver $\sin(ax^2) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + O(x^5)$ och betonar att dessa koefficienter man skall hitta $a_0 = ?$, $a_1 = ?$, $a_2 = ?$, $a_3 = ?$, $a_4 = ?$ Man visar att man fattar bar begreppet "grad" betyder i sammanhanget. Tex. ganska många koefficienter är 0, så man visar att man fattar att några koefficienter kan blir noll, och att det behövs inte utveckla utöver grad 4.



Vad är det man skall inse här? Ju, man kan derivera tills man svimmar, men det viktiga är att inse att man kan göra ett variabel byte: byt u mot ax^2 och använda den vanligt Taylor serie av $\sin u$ och $\cos u$. Det viktiga är att inse hur detta påverkar graden av utvecklingen.

Taylor's Theorem

If the $(n + 1)$ st-order derivative, $f^{(n+1)}(t)$, exists for all t in an interval containing a and x , and if $P_n(x)$ is the n th-order Taylor polynomial for f about a , that is,

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n,$$

then the error $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ in the approximation $f(x) \approx P_n(x)$ is given by

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1},$$

where s is some number between a and x . The resulting formula

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}, \quad \text{for some } s \text{ between } a \text{ and } x,$$

is called **Taylor's formula with Lagrange remainder**; the Lagrange remainder term is the explicit formula given above for $E_n(x)$.

tenta frågan övning (MVG)

G/VG: Går det att Taylor utveckla $f(x)$ kring a i alla fall under. Om du misstänker att det går att utveckla, gör det i linjär approximation och analysera E. **MVG:** Kunna uppskatta E eller åtminstone diskutera den på ett vettigt sätt.

- (a) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 0$
- (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$
- (c) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $a = 0$
- (d) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, $a = 0$
- (e) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, $a = \frac{\pi}{2}$

Taylor's Theorem

If the $(n+1)$ st-order derivative, $f^{(n+1)}(t)$, exists for all t in an interval containing a and x , and if $P_n(x)$ is the n th-order Taylor polynomial for f about a , that is,

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

then the error $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ in the approximation $f(x) \approx P_n(x)$ is given by

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

where s is some number between a and x . The resulting formula

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \text{for some } s \text{ between } a \text{ and } x,$$

is called **Taylor's formula with Lagrange remainder**; the Lagrange remainder term is the explicit formula given above for $E_n(x)$.

G/VG nivå: Här skall man inse att $\sqrt{x}$ går inte att Taylor utveckla i $x = 0$ för derivatan är oändlig. Samma med (c) och (d). Fall (c) är en riktig skummis, Darth Vader i egen hög person.

MVG nivå: att veta hur man analyserar felet, som vi gjorde under föreläsning. Tex. man skall kanske kunna argumentera att för $\sqrt{x}$ felet blir större när x är liten. Det är en MVG fråga, alltså öppet på sätt och vis.

Några komplexa frågor med diverse olika moment där man måste kombinera olika analys kunskaper

I (a) och (b) utveckla funktionen för stora x ($x \rightarrow \infty$) och behåll två signifikanta termer (som inte är noll):

(a) $\sqrt{x+1} = ? + O(?)$ Här man måste inse att $\sqrt{x+1} = \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ och att $\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ skall tolkas som $\sqrt{1+u}$ med $u = 1/x$ väldigt liten tal, alltså $\sqrt{1+u}$ skall Taylor utvecklas kring $u = 0$ som $\sqrt{1+u} \approx 1 + a_1 u + O(u^2)$ och så byter man tillbaka till x , då får man svaret.

(b) $\sqrt{x-1} = ? + O(?)$ Samma här, man använder $\sqrt{x-1} = \sqrt{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$ etc.

När du är färdig med utvecklingen (återkoppling till derivatan):

(c) Använda approximationerna under (a) och (b) för att räkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = ?$ Vilken typ av gränsvärde är detta?

Här skall man inse att "farliga" termer annullerar varandra.

(d) Använda approximationerna under (a) och (b) för att räkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = ?$; Vilken typ av gränsvärde är detta?

Samma här...

(e) Räkna gränsvärdena under (c) och (d) men en annan teknik du behärskar (tex. L'Hopital, eller någonting annat)

Två sätt, äntligen man använder konjugat regeln, eller L'Hopital.

Några komplexa frågor

Utveckla för stora x och behåll tre signifikanta termer (som inte är noll)

(a) $\sqrt{x^2 + x} = ? + O(?)$ när $x \rightarrow \infty$

(b) Använda approximationen under (a) för att räkna gränsvärdet

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = ?$ Vilken typ av gränsvärde är detta?

(c) För att kolla din resultat, räkna gränsvärdet under (b) men en annan teknik du behärskar (tex. L'Hopital, eller någonting annat)

I (a) man måste inse att $\sqrt{x^2 + x} = \sqrt{x^2 (1 + \frac{1}{x})} = \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ och då Taylor utveckla $\sqrt{1 + u}$ i $u = 0$ med tillbaka substitution $u = \frac{1}{x}$. I (b) poängen är att se att farliga termer (som "exploderar" när x blir stort) annullerar varandra, så det enda som är kvar är "snygga" termer. Fall (c) går att fixa med konjugat regeln, som man följer upp med L'Hopital (för det blir en ∞/∞ form).

en svår fråga: beteende kring en punkt

- Hur ser $f(x) = \sin(\pi - \sqrt{x} + x)$ ut för x -värden nära 0? Vilken strategi kan du använda för att begripa hur en sådan komplicerad funktion ser ut i omgivningen av en punkt? Ser funktionen ut som ett polynom eller någonting annat?

Kring $x = 0$ funktionen ser inte ut som en polynom, för att $f(x) = \sin(\sqrt{x} - x)$ har ingen Taylor serie omkring $x = 0$. Man kan visa dock att med variabel bytet $u = \sqrt{x}$ att $\sin(\sqrt{x} - x)$ kan approximeras med Taylor serie av $\sin(u - u^2)$ kring $u = 0$. Det går att visa $\sin(u - u^2) = u + u^2 + O(u^3)$. Man byter u mot $\sqrt{x}$ i sista steget för att slutligen visa att $\sin(\sqrt{x} - x) = \sqrt{x} - x + O(x^{\frac{3}{2}})$. Det här är ingen polynom på grund av $\sqrt{x}$ i uttrycket.



Untitled-1 * - Wolfram Mathematica 11.0

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

```
In[2]:= Series[Sin[u + u^2], {u, 0, 3}]
```

```
Out[2]= u + u^2 - \frac{u^3}{6} + O[u]^4
```

några tenta frågor (alla av MVG karaktären) som relaterar till de tidigare frågor

(1) Går det att tillämpa medelvärdesatsen till $f(x) = \sqrt{x}$ i en intervall $[0, \epsilon]$ där ϵ är ett litet tal, tex. $\epsilon = 0.01$?

Kolla villkor för satsen. Är det sant att $f(x)$ är kontinuerlig i intervallet $[0, \epsilon]$? Det är nog sant. Är det sant att $f'(x)$ finns i intervallet $(0, \epsilon)$? Det är nog sant. Då går det. Men...

(2) Går det att tillämpa linjär approximation satsen till $f(x) = \sqrt{x}$ i en intervall $[0, \epsilon]$ där ϵ är ett litet tal, tex. $\epsilon = 0.01$?

Kolla villkor för satsen. Är det sant att $f(x)$ är kontinuerlig i intervallet $[0, \epsilon]$? Det är nog sant. Är det sant att $f'(x)$ finns i intervallet $[0, \epsilon]$? Det är inte sant. Derivatan $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ finns inte i $x = 0$. Då går det inte att linjär approximera.

(3) Kan man approximera $\sqrt{x}$ med en polynom kring $x \approx 0$? Om "ja" varför? Om "nej" varför? Går det att Taylor utveckla $f(x) = \sqrt{x}$ kring $a = 0$? Det går inte $a = 0$ för derivatan $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ finns inte i $x = 0$. Högre derivata finns inte heller. Kan man approximera $\sqrt{x}$ med en polynom kring $x \approx 1$? Går det att Taylor utveckla kring $a = 1$? Det går i $a = 1$.