

W6 – RÖ2 integrations tekniker och integral tillämpningar

- vi fortsätter med integrations tekniker och räknar längder av kurvor och komplicerade ytor
- kommentarer i grått eller grafer, skall inte finnas tillgängliga på tentan. de finns nu för att underlätta övningen.

ADAMS/6.2 integraler av rationella funktioner

integraler av rationella funktioner kan förenklas till bara två typer $\int \frac{dx}{(1 \pm x)^n}$ eller $\int \frac{ax+b}{(1+x^2)^n} dx$; huvud sats är att varje polynom kan faktoriseras i en produkt av termer med två typer $(x - a)^m$ eller $(x^2 + ax + b)^m$; i princip dessa integraler är enklaste att räkna (dock jobbigaste, med många steg). Här vi ser hur man räknar dessa integraler. Viktig mellansteg.

(G) omvandla integralen $\int \frac{dx}{(1+x+x^2)^3}$ till formen $\int \frac{(a+bu)du}{(1+u^2)^c}$. Vad är a, b, och c lika med?

(G) omvandla integralen $\int \frac{x dx}{(1-x+x^2)^{11}}$ till formen $\int \frac{(a+bu)du}{(1+u^2)^c}$. Vad är a, b, och c lika med?

ADAMS/6.2 integraler av rationella funktioner

integraler av rationella funktioner kan förenklas till bara två typer $\int \frac{dx}{(1 \pm x)^n}$ eller $\int \frac{ax+b}{(1+x^2)^n} dx$; huvud sats är att varje polynom kan faktoriseras i en produkt av termer med två typer $(x - a)^m$ eller $(x^2 + ax + b)^m$; i princip dessa integraler är enklaste att räkna (dock jobbigaste, med många steg). Här tittar vi på hur man räkna den jobbigare integralen.

Problem: Hitta en rekursiv formula för $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$. Räkna I_1 och I_2 .

Tips: Använd partiellintegration med $dv = dx$ och $u = \frac{1}{(1+x^2)^n}$.

Mellansteg $I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int (-n)(1+x^2)^{-n-1} 2x dx$ $x = \frac{x}{(1+x^2)^n} +$

$2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx$. För att räkna $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx$ skriv den om som $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx =$

$\int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} - \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = I_n - I_{n+1}$. Pussla ihop det hela till: $I_n =$

$\frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(I_n - I_{n+1})$ och uttryck I_{n+1} som funktion av I_n och byt $n \rightarrow n - 1$.

Förstår du varför? För att kunna räkna rekursionen!

ADAMS/6.2 integraler av rationella funktioner

integraler av rationella funktioner kan förenklas till bara två typer $\int \frac{dx}{(1 \pm x)^n}$ eller $\int \frac{ax+b}{(1+x^2)^n} dx$; huvud sats är att varje polynom kan faktoriseras i en produkt av termer med två typer $(x-a)^m$ eller $(x^2+ax+b)^m$; i princip dessa integraler är enklaste att räkna (dock jobbigaste, med många steg). Här vi använder allt vi har lärt oss hittills.

(G) AD/6.2-Prob 12: $\int \frac{dx}{x^3+9x}$ Mellansteg kontroll: $\frac{1}{9x+x^3} = \frac{1}{9x} - \frac{x}{9(9+x^2)}$

(G) AD/6.2-Prob 22: $\int \frac{x^2+1}{x^3+8} dx$ Mellansteg kontroll: $\frac{1+x^2}{8+x^3} = \frac{5}{12(2+x)} + \frac{-4+7x}{12(4-2x+x^2)}$

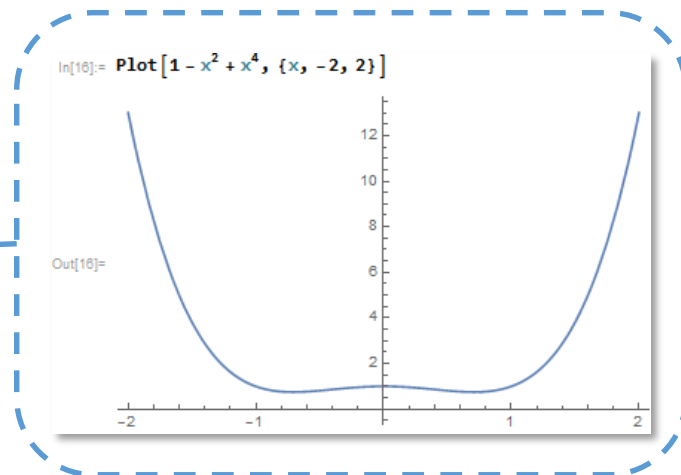
(MVG) tenta: $\int \frac{1}{x^6+1} dx$; tips: $x^6 + 1 = (x^2 + 1)p_4(x)$ och grafen visar $p_4(x)$

Mellansteg kontroll: man skall räkna ut att

$p_4(x) = 1 - x^2 + x^4$ och då $\frac{1}{1+x^6} =$

$\frac{1}{3(1+x^2)} + \frac{2-x^2}{3(1-x^2+x^4)}$. Polynomet $p_4(x) = 1 - x^2 + x^4$ har inga noll punkter.

Då enligt satsen AD/6.2-T1 $p_4(x) = (ax^2 + bx + c)(rx^2 + sx + t)$. Vad kan man välja för a och r ? Vad kan man välja då för c och t ?



Slutligen man ser att $(1 + \sqrt{3}x + x^2)$ multiplicerat med $(1 - \sqrt{3}x + x^2)$ ger $p_4(x)$.

viktiga integraler: $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$

- skriv om integralen som $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}) dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$
- räkna (gissa) integralen för $\int \frac{\sin \frac{x}{2} dx}{\cos \frac{x}{2}} \rightarrow \int \frac{\sin u du}{\cos u}$
- räkna (gissa) integralen för $\int \frac{\cos \frac{x}{2} dx}{\sin \frac{x}{2}} \rightarrow \int \frac{\cos u du}{\sin u}$
- kombinera alla termer

viktiga integraler: $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| + c$

- Sätt 1: $u = \tan \frac{x}{2}$
- $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1+u^2}$
- $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{u^2}{1+u^2}$
- $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$
- $\frac{d}{dx} \left(u = \tan \frac{x}{2} \right) \rightarrow$
 $dx = \cos^2 \frac{x}{2} du = \frac{2du}{1+u^2}$
- $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2du}{1-u^2} = \int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du = \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right|$
- Sätt 2: använd $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
- $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \int \frac{du}{\sin(u)}$ med $u = x + \frac{\pi}{2}$
- $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \tan \frac{u}{2} \right|$
- $\ln \left| \tan \frac{u}{2} \right| = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$

viktiga integraler: $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| + \frac{\tan x}{\cos x} \right) + c$

- steg 3: utvärdera integralen med partiell integration

- $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int \frac{1}{\cos x} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

- använd $u = \frac{1}{\cos x}$ och $dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \rightarrow v = \tan x$

- $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \frac{\tan x}{\cos x} - \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} \tan x$

- $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} \tan x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^3 x} - \int \frac{dx}{\cos x}$

- $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \frac{\tan x}{\cos x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x}$

viktiga integraler: $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a})$

- steg 1: variabel byte $x = a \sin u$
- steg 2: räkna $\int \cos^2 u \, du$
- steg 3: omvandla kvadrat av cos till första potensen genom att räkna $1 + \cos 2u$
- steg 4: räkna $\int \cos 2u \, du$
- byt tillbaka till ursprungliga variabler

viktiga integraler:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln \left| \sqrt{a^2 + x^2} + x \right| \right] + c$$

steg 1: variabel byte $x = u a$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = a^2 \int \sqrt{1 + u^2} du$$

steg 2: variabel byte $u = \tan \omega$

- $\frac{du}{d\omega} = \frac{1}{\cos^2 \omega} \rightarrow du = \frac{1}{\cos^2 \omega} d\omega$
- $1 + u^2 = \frac{1}{\cos^2 \omega}$
- återanvänd tidigare resultat för integralen

$$\int \frac{d\omega}{\cos^3 \omega} = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{1 + \tan \frac{\omega}{2}}{1 - \tan \frac{\omega}{2}} \right| + \frac{\tan \omega}{\cos \omega} \right)$$

och byt tillbaka till x med $\omega = \tan^{-1} \frac{x}{a}$

För att utföra variabel byte man måste uttrycka $\tan(x/2)$ i $\tan(x)$

$$\tan \frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{1+p^2}-1}{p} \quad p = \tan \omega$$

$$\frac{1 + \tan \frac{\omega}{2}}{1 - \tan \frac{\omega}{2}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{1+p^2}-1}{p}}{1 - \frac{\sqrt{1+p^2}-1}{p}}$$

$$= \frac{p + \sqrt{1+p^2} - 1}{p - \sqrt{1+p^2} + 1}$$

$$= \frac{p-1 + \sqrt{1+p^2}}{p+1 - \sqrt{1+p^2}}$$

$$= \frac{[(p-1) + \sqrt{1+p^2}](p+1 + \sqrt{1+p^2})}{(p+1)^2 - (1+p^2)}$$

$$= \frac{(p-1)(p+1) + (p-1+p+1)\sqrt{1+p^2} + 1+p^2}{\cancel{p^2} + 2p + \cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{p^2}}$$

$$= \frac{p^2 - 1 + 2p\sqrt{1+p^2} + 1 + p^2}{2p}$$

$$= \frac{2p^2 + 2p\sqrt{1+p^2}}{2p} = p + \sqrt{1+p^2}$$

ADAMS/6.3 substitutions tekniker

Integral	substitution
(G) AD/6.3-Prob 1: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$	$u = 2x$ och integralen omvandlas till $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ typen
(G) AD/6.3-Prob 3: $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$	$u = 3x$ och integralen omvandlas till $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ typen; ?följ detta med substitution $x = \sin u$
(VG) AD/6.3-Prob 9: $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^2}}$	$u = 3x$ och integralen omvandlas till $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$ typen; ?följ detta med substitution $x = \tan u$
(VG) 6.3-Prob 16: $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-a^2}}$	$u = ax$ och integralen omvandlas till $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}}$ typen; följ detta med substitutionen $x = \sec u = \frac{1}{\cos u}$

AD/7.3 räkna längder av kurvor

In Exercises 1–16, find the lengths of the given curves.

1. $y = 2x - 1$ from $x = 1$ to $x = 3$

2. $y = ax + b$ from $x = A$ to $x = B$

5. $y^3 = x^2$ from $(-1, 1)$ to $(1, 1)$

ytan mellan två grafer

EXERCISES 5.7

In Exercises 1–16, sketch and find the area of the plane region bounded by the given curves.

1. $y = x, \quad y = x^2$

2. $y = \sqrt{x}, \quad y = x^2$

27. Find the total area enclosed by the curve $y^2 = x^2 - x^4$