W7-RÖ2, MVE045, Tränings tenta

Zoran Konkoli, 2020-10-12

Om relevant, välj en av (a), (b), etc. Kommentarer i grått kommer inte att finnas i tesen. I texten de finns bara för att underlätta övningen.

1a. Hitta realdelen och imaginärdelen av

$$z = \frac{2 + 3i + 4i^2}{5 + 6i + 7i^2}$$

Svar: $z = \frac{11}{20} + \frac{3i}{20}$.

1b. Hur mycket är realdelen och imaginärdelen av z^{12} om

$$z = \frac{2 + 3i + 5i^6}{5 + 6i + 5i^2}$$

Tips: skriv om z i polär form. Rivstart och mellanstegs kontroll: $z = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$; $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$, $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$. Fortsätt med att räkna från $z = re^{i\theta}$ där $\theta = \arg(z)$; $z^{12} = r^{12}e^{i12\theta}$.

2a. Beräkna derivatan av $f(x) = (x+1)^5(x+2)^6$ i $x = 0$, -1, -2.

2b. Hur mycket är $f'(x)$ om $f(x) = \sin^2\left(x + \sqrt{x}\right) + \cos^2\left(x + \sqrt{x}\right)$. Svar: 0. Kan ni se varför utan att räkna?

2c. Beräkna derivatan av $f(x) = \tan|x|$ i $x = \frac{\pi}{4}$ och $x = -\frac{\pi}{4}$. Tips: Betrakta uttrycket som en sammansatt funktion där den inre funktionen är absolut belopp. Visa att inre derivatan blir $|x|' = \frac{|x|}{x} = \mathrm{sig}(x)$ där sig är signum (tecken) funktion.

3a. Hur mycket är $\Delta(x^2 + \sin\sqrt{x\pi^2})$ i $x = 1$ om $\Delta x = 0.1$? Använd inte räknare. Tips: $df = f'(x)dx$ och vi kan använda approximationen $\Delta f \approx df$.

3b. Hur mycket ändrar sig $y = x^2 + \sin\sqrt{x\pi^2}$ om x ändras från $x = 1$ till $x = 1.1$? Använd inte räknare.

3c. Ekvationen $y = x^2 + \sin\sqrt{x\pi^2}$ har lösningen $x = 1$ och $y = 1$. Om x ändras från 1 till 1.1 hur mycket behöver man justera y? Använd inte räknare.

3d. Ekvationen $y = x^2 + \sin\sqrt{x\pi^2}$ har lösningen $x = 1$ och $y = 1$. Om y ändras från 1 till 1.1 hur mycket behöver man justera x? Använd inte räknare.

3e. Variabler a och b beror på x. Hur mycket är $d(a^2b^3)$ i stunden där $a = 3$, $b = 11$. Just i denna stund vi vet att $da/dx = 2$ och $db/dx = 5$. Anta att $dx = 0.1$. Använd inte räknare. Rivstart hjälp: Börja från $d(a^2b^3) = d(a(x)^2b(x)^3) = \frac{d(a(x)^2b(x)^3)}{dx}dx$.

4a. Betrakta funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

(a) Vad är definitions mängden för $f(x)$?

(b) I vilka punkter är den kontinuerlig (och varför)?

(c) Du visar funktionen till en kompis. Hen säger följande. ”Super enkelt. Använd bara konjugat regel år $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$ och funktionen $f(x) = x + 1$ är ett polynom och enligt en sats i ADAMS är polynomer kontinuerliga funktioner”. Tyvärr, vad kompisen säger är bara delvis rätt. Kan du ”rätta till” det hen säger?

4b. Går det att definiera konstanten a så att funktionen kan göras kontinuerlig för alla reella tal? Om ”ja” förklara varför, om ”nej” förklara varför. Ange kontinuitets definition och visa tydlig hur du använder den. Hur borde man hantera $f(\pi)$? Tips: det hjälper att tänka på vad definitions mängden av $f(x)$ är.

$$f(x) = \frac{\sin(3(x+a))}{2(x-\pi)}$$

Svar: $a = -\pi$; $f(\pi) = 3/2$.

4c. Går det att definiera konstanten a så att funktionen kan göras kontinuerlig för alla reella tal? Om ”ja” förklara varför, om ”nej” förklara varför. Ange kontinuitets definition och visa tydlig hur du använder den. Hur borde man hantera $f(\pi)$? Tips: det hjälper att tänka på vad definitions mängden av $f(x)$ är.

$$f(x) = \frac{\sin(x+a)}{(x-\pi)^2}$$

Svar: det går inte att hitta ett a. Det bästa man kan åstadkomma är en singularitet av typ $f(x) \sim \frac{1}{x-\pi}$ om man väljer $a = \pi$. Funktionen exploderar för $x \to \pi$.

4d. Går det att definiera konstanten a så att funktionen kan göras kontinuerlig i sin definitions mängd? Om ”ja” förklara varför, om ”nej” förklara varför. Ange kontinuitets definition och visa tydlig hur du använder den. Hur borde man hantera $f(\pi)$? Tips: det hjälper att tänka på vad definitions mängden av $f(x)$ är.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+a)}{\sqrt{x-\pi}} & x \neq \pi \\ f(\pi) & x = \pi \end{cases}$$

Svar: Rivstart: Definitions mängden är $\{\pi\} \cup (\pi, \infty)$. En sats i Adams garanterar kontinuitet i (π, ∞). Den enda man skall kolla noggrant är att funktionen är (högerkontinuerlig) i $x = \pi$. Det går att hitta ett a. Det bästa man kan åstadkomma är en singularitet av typ $f(x) \sim \frac{x-\pi}{\sqrt{x-\pi}}$ om man väljer $a = \pi$.

5a. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x+3\pi)}{\cos(x - \frac{\pi}{2})}$$

5b. Går det att definiera konstanten *a* så att gränsvärdet finns? Lös problemet först med enkla argument (se vad händer i 5a). Ange kontinuitets definition och visa tydlig hur du använder den. Hur kunde du argumentera på ett rigoröst sätt med hjälp av TU av täljare och nämnare kring $x = 0$?

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x+a\pi)}{\cos(x - \frac{\pi}{2})}$$

6. Beräkna derivatan $\frac{dy}{dx}$ med implicit derivering i $x = 1$ och $y = 0$ för en funktion som definieras med ekvationen $y \sin y + x \cos y = y + \sqrt{x}$.

7a. Man vet att $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = \ln x - \ln(1 + \sqrt{1 - x^2})$. Hur kan man använda denna information att räkna $\int \frac{12}{3x\sqrt{1-4x^2}} dx$?

7b. Man vet att $\int \sin x \, e^x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$. Hur kan man använda denna information att räkna $\int \sin(4x) \, e^{4x} \, dx$?

7c. Man vet att $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = \ln x - \ln(1 + \sqrt{1 - x^2})$. Hur kan man använda denna information att räkna $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{6x-x^2-5}}$?

7d. Beräkna integralen $\int \sin x \, e^x \, dx$. Använd partiell integration.

7e. Beräkna integralen $\int \cos x \, e^x \, dx$. Använd partiell integration.

7f. Man vet att $\int \sin x \, e^x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$. Hur kan man använda denna information för att beräkna $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \, e^{2x} dx$?

8. Taylor utveckla funktionen $f(x) = \sin\left(\frac{(x^2+1)\pi}{4}\right)$ kring $x = 0$ fram till och inklusive grad 2. Glöm inte att ange $O()$ termen. Svar: $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi x^2}{4\sqrt{2}} + O[x]^3$.

9. Approximera funktionen $f(x) = \frac{x^2-x}{x+1}$ när x går mot oändligheten (med en serie i $1/x$). Behåll fyra mest signifikanta termer och glöm inte att ange $O()$ termen (som räknas som den femte termen). Tips: använd polynomdivision först, och sedan Taylorutveckling. Mellansteg kontroll: Polynom division ger $f(x) = x - 2 + \frac{2}{1+x}$.

10a. Hitta realdelen och imaginärdelen av

$$z = \sin \frac{(1+i)\pi}{4}$$

Svar: $z = \frac{\mathrm{ch}[\frac{\pi}{4}]}{\sqrt{2}} + \frac{i \, \mathrm{sh}[\frac{\pi}{4}]}{\sqrt{2}}$.

10b. Lös ekvationen $y''(x) = \sin x + x + x^2$ med begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$.

Mellanstegs kontroll: $y(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + c_1 + c_2 x - \sin x$.

10c. Lös ekvationen $(y-1)y' = (y-1)(2 + \sin x)$ med begynellse villkor $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
Mellanstegskontroll: $y(x) = 2x + c_1 - \cos x$.

10d. Lös ekvationen $\frac{d}{dx}(e^y) = \sin x + \cos x$ med begynellse villkor $y(0) = 1$.

Mellanstegskontroll: $y(x) = \ln(sin\, x - cos\, x + c_1)$.

10e. Lös differentialekvationen med begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$:

$$y''(x) - 8y'(x) + 17y(x) = 0$$

Mellanstegskontroll: $y(x) = e^{4x}(c_1 \cos[x] + c_2 \sin[x])$.

10f. Lös differentialekvationen med begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$:

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x^2 - 6$$

Leta y_p i formen $ax^2 + bx + c$. Mellanstegskontroll: $y(x) = 4x + x^2 + e^x(c_1 + x\, c_2)$.

10g. Lös differentialekvationen med begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$:

$$y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = x - \frac{2}{5}$$

Leta y_p i formen $ax + b$. Mellanstegskontroll: $y(x) = \frac{x}{5} + e^x(\mathrm{c}_1\cos[2x] + c_2\sin[2x])$.

10h. Lös differentialekvationen med begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$:

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = x + 1$$

Mellanstegskontroll: $y(x) = \frac{2+x}{4} + e^{2x}(c_1 + c_2\, x)$. Svar: $y(x) = \frac{1}{4}(2 + 2e^{2x} + x - 5e^{2x}x)$

10i. Lös differentialekvationen med begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$:

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = x + 1$$

Mellanstegskontroll: $y(x) = \frac{2+x}{4} + e^{2x}(c_1 + c_2\, x)$. Svar: $\frac{1}{4}(2 - 2e^{2x} + x + 7e^{2x}x)$.

11a. Hitta med separationstekniken lösningen till differentialekvationen

$$x\frac{y'}{y} = 3y^3x^2 \ln x$$

med begynnelsevillkoret $y(1) = 1$. Mellanstegs kontroll: $y(x) = \frac{2^{2/3}}{3^{1/3}(3x^2 - c_1 - 6x^2\ln[x])^{1/3}}$.

11b. Beräkna integralen:

$$\int_0^2 \frac{x^4 + 16}{x^3 + 8}\, dx$$

Mellanstegskontroll: $\frac{x^4+16}{x^3+8} = x + \frac{8}{3(2+x)} - \frac{8(-1+x)}{3(4-2x+x^2)}$.

12. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}(1 + \tan x)^{1/x}$$

13a. Ekvationen $x = \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{y}\right)$ har lösningen $x = 1$ och $y = 1$. Om x ändras från 1 till 1.1 hur mycket behöver man justera y? Visa hur du skulle räkna värdet för den nya y utan att använda räknaren. Om linjär approximation går inte att använda försök med högre grads Taylorutveckling.

13b. Lös differentialekvationen med begynnelsevillkoren $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$. Ekvationen är angiven i operatorform:

$$\left(\frac{d}{dx} - 2\right)^3 y(x) = x + 1$$

Tips: använd ansats $y(x) = e^{rx}u(x)$ och analysera $\left(\frac{d}{dx} - 2\right) y(x)$ och välj en lämplig r utifrån denna analys. Insättning av ansatsen i ekvationen ger en differentialekvation för $u(x)$. Den partikulära lösningen kan letas i formen $y_p(x) = ax + b$. Det är fördelaktig att skriva om ekvationen från operatorform till den klassiska formen $a_3 y_p'''(x) + a_2 y_p''(x) + a_1 y_p'(x) + a_0 y_p(x) = x + 1$ med hjälp av $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$. Tips: se video på CANVAS (”självstudie 2”).