

sammanfattning

den 19 oktober 2020 12:16

mall i matematiken = recept för problem lösning

ex: roten av kvadrat ekvation

den viktigaste analys mallen $dy = g dx$ och hur den "visar sig"

typ I: numerisk approximation - explicit

typ II: numerisk approximation - implicit

typ III: ändring över ett intervall

- (a) differential ekvation (modellerings verktyg)

- (b) bestämd integral

typ IV: differential kalkyl

lärande mål genomgång

ett exempel av en mall - att "matcha" mallen

den 19 oktober 2020 12:22

Roots and Factors of Quadratic Polynomials

There is a well-known formula for finding the roots of a quadratic polynomial.

The Quadratic Formula

The two solutions of the quadratic equation

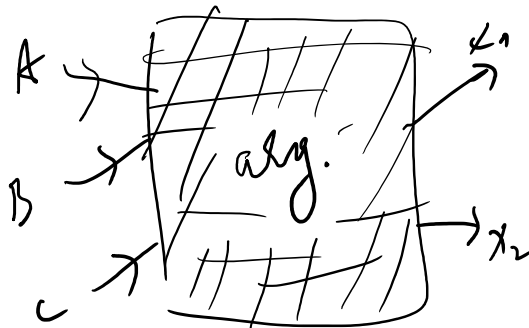
$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

where A , B , and C are constants and $A \neq 0$, are given by

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

$$Ax_1^2 + Bx_1 + C = 0$$

$$Ax_2^2 + Bx_2 + C = 0$$

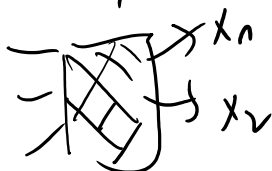


$$2x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$A = 2$$

$$B = 3$$

$$C = 4$$



$$-x^2 + 3x - 1 = 0 \quad (+)x^2 + 3x + (-1) = 0$$

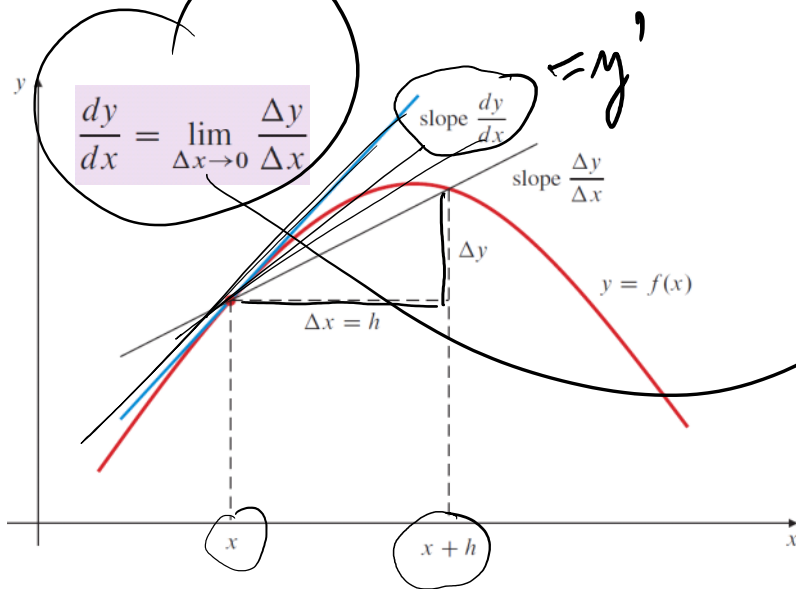
$$A = -1$$

$$B = 3$$

$$C = -1$$

den viktigaste analys mallen $dy = g dx$
och hur den "visar sig"

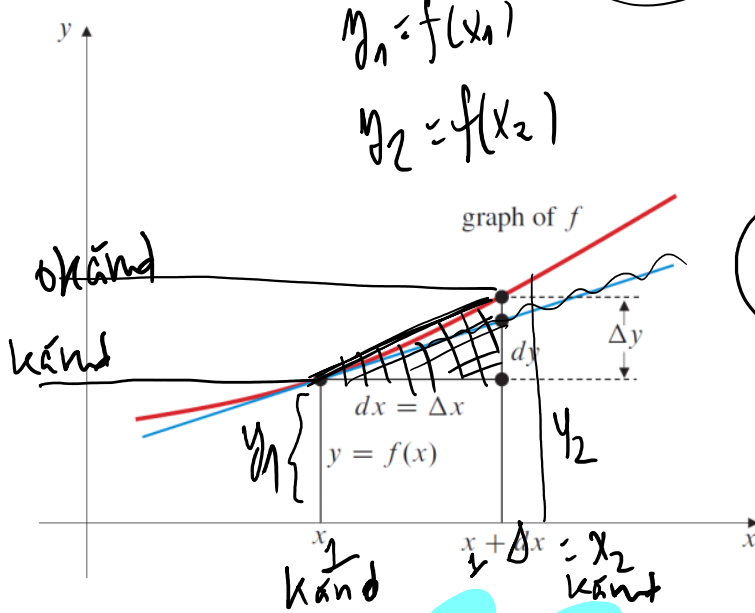
den 19 oktober 2020 12:26



Teori
hur jobbar
man med
 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$

typ I: x_1 känd, y_1 känd, x_2 känd $\rightarrow$ y_2 okänd

den 19 oktober 2020 12:28



$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx f'(x_1)$$

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\Delta f = y_2 - y_1$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Exempel:

$$y = 2x^2 + \ln x$$

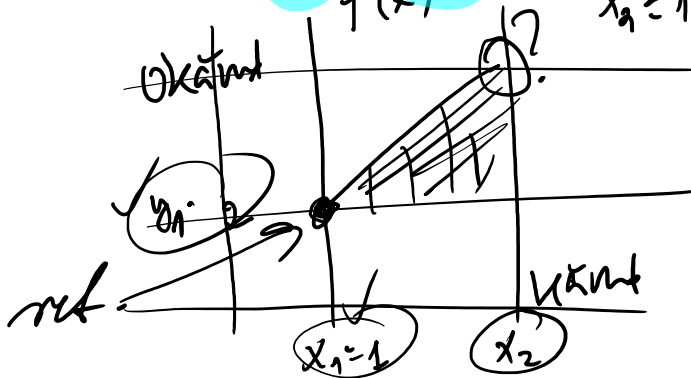
$f(x)$

$$x_1 = 1 \quad y_1 = 2 \cdot 1^2 + \ln 1 = 2$$

$$x_2 = 1 + 0.1 \quad y_2 = ?$$

$$f'(x) = 2 \cdot 2x + \frac{1}{x}$$

$$\Delta y \approx f'(x_1) \cdot \Delta x$$



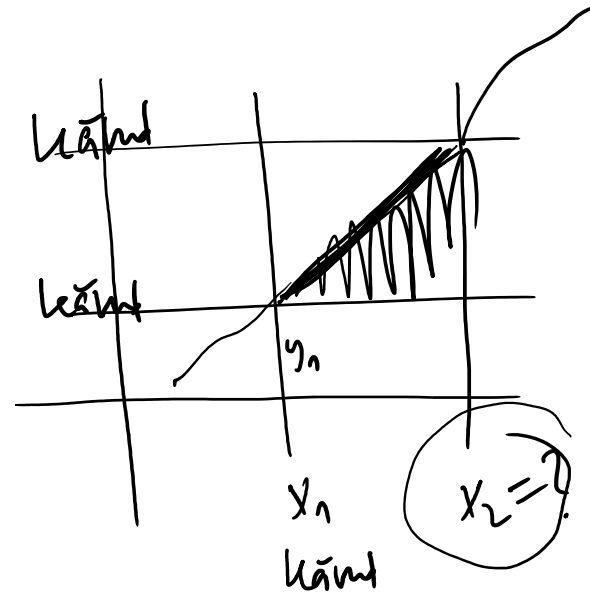
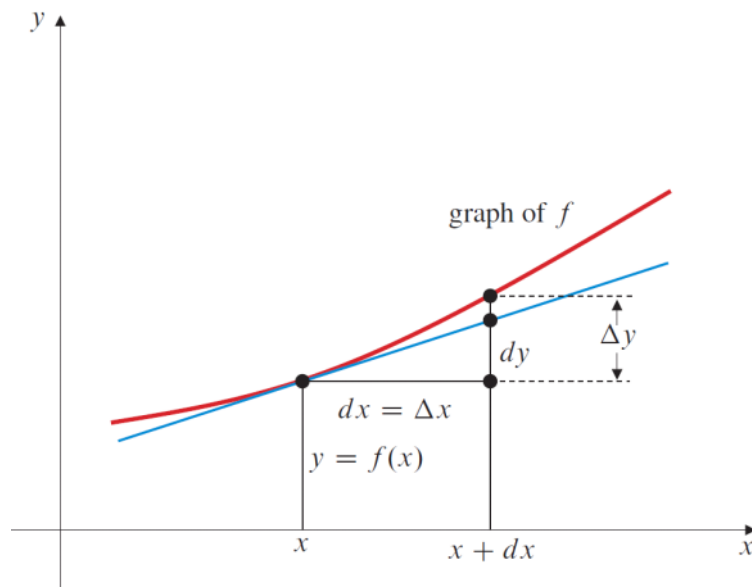
$$y_2 - y_1 \approx f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$f'(x_1) = f'(1) = 4 \cdot 1 + \frac{1}{1} = 5$$

$$y_2 = y_1 + f'(x_1)(x_2 - x_1) = 2 + 5(1.1 - 1)$$

typ II: x_1 känd, y_1 känd, y_2 känd $\rightarrow x_2$ okänd

den 19 oktober 2020 12:28



Ex:

$$y = 2x^2 + \ln x$$

$$x_1 = 1$$

$$y_1 = 2$$

$$x_2 = ?$$

$$y_2 = 2.1$$

$$y_2 - y_1 = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$2.1 - 2 = 5(x_2 - 1)$$

$$\frac{2.1 - 2}{5} = x_2 - 1, \quad x_2 = 1 + \frac{2.1 - 2}{5}$$

typ III-a: ändring över ett intervall - samma som typ I men x_1 och x_2 är långt ifrån varandra

den 19 oktober 2020 12:28



$$x_1 = 1$$

$$y_1 = f(x_1) = 3$$

$$y_2 = f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) + f'(x_1) \Delta x$$

$$= y_1 + g(x_1) \Delta x$$

$$y_3 = f(x_2 + \Delta x) = f(x_2) + f'(x_2) \Delta x$$

$$= y_2 + g(x_2) \Delta x$$

$$f(x_1) = y_1$$

$$f(x_2) = y_2$$

$$f(x_2) = f(x_1) + g(x_1) \Delta x$$

$$f(x_3) = f(x_2) + g(x_2) \Delta x$$

$$f(x_4) = f(x_3) + g(x_3) \Delta x$$

DE

EX

$$y = ? \quad \Delta y \approx g(x) \cdot \Delta x$$

$$y' = \ln x + 2x$$

$$y = f(x) \quad g(x)$$

$$f(1) = 3$$

$$f(2) = ? \quad f(1.75) = ?$$

$$\Delta y = f'(x_1) \Delta x$$

$$y_2 - y_1 = f'(x_1) (x_2 - x_1)$$

$$y_2 = y_1 + f'(x_1) \Delta x$$

$$g(x_1) = (\ln x + 2x)'_{x=x_1=1}$$

$$= \ln 1 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$f_2 - f_1 = g(x_1) \Delta x$$

$$f_3 - f_2 = g(x_2) \Delta x$$

$$f_4 - f_3 = g(x_3) \Delta x$$

$$f_4 - f_1 = \sum g(x_i) \Delta x$$

DE

$$f'(x) = g(x) = \underline{\ln x + 2x}$$

$$f(1) = 3$$

$$\int_1^2 g(x) dx$$

quick & dirty
proof

$$(x \ln x)' = 1 \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$(x \ln x)' - 1 = \ln x$$

$$(\underline{x \ln x - x})' = \ln x$$

$$\int \ln x dx$$

$$\textcircled{1} f(x) = x \ln x - x + x^2 + C$$

$$3 = f(1) = 1 \cancel{\ln 1} - 1 + 1^2 + C$$

$$f(x) = x \ln x - x + x^2 + 3$$

$$f(2) = 2 \ln 2 - 2 + 2^2 + 3$$

typ III-b: den bestämda integralen

den 19 oktober 2020 12:28

Varför skriver du $g(x)dx$ istället för $f(x)dx$? När du skriver upp integralen dvs Svar: för att kunna särskilja typ I/II och typ III, och inte behöva byta notation

Notera:

$$f'(x) = g(x)$$

$$f(x) \equiv G(x)$$

$$df = f' dx$$

$$df = g \cdot dx$$

$$g = f'$$

alternativ notation

$$dF = F' dx = f \cdot dx$$

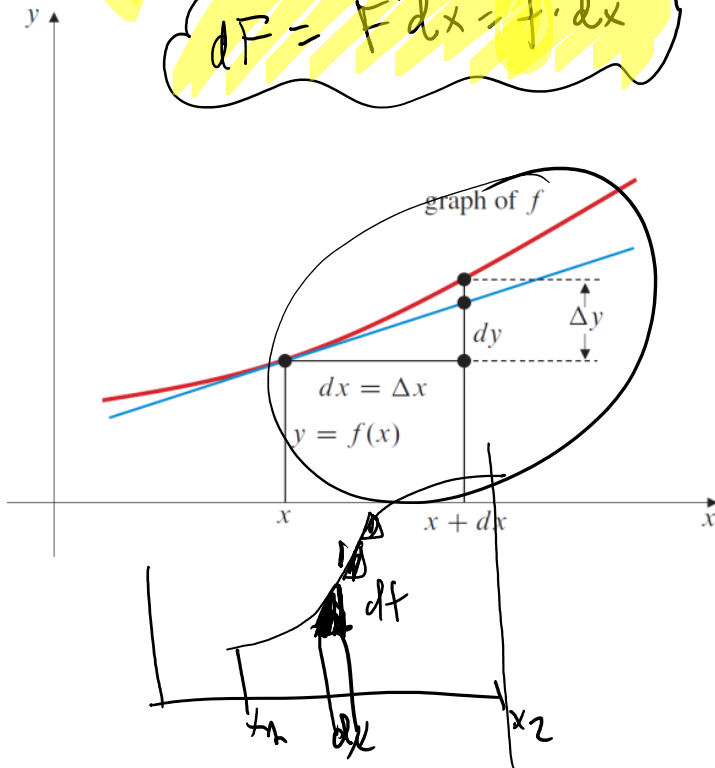
$$\int f(x) dx$$

$$\frac{df}{dx} = g(x)$$

$$\Delta f = g(x) \cdot dx$$

$$\int_{f(1)}^{f(2)} df = \int_1^2 g(x) dx$$

$$f(2) - f(1) = \int_1^2 g(x) dx$$

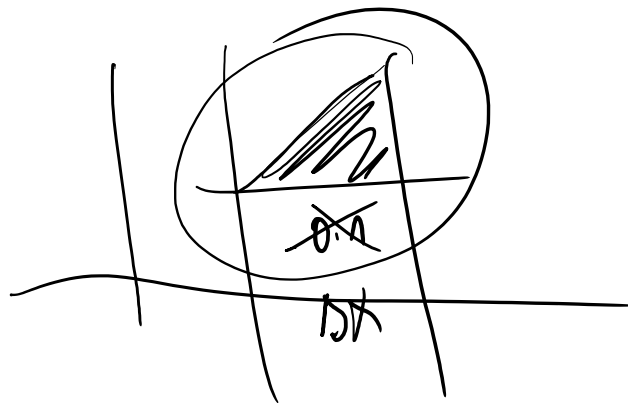


$$\sum_x \Delta f = \sum_x g(x) \cdot \Delta x \quad \Delta x \rightarrow 0$$

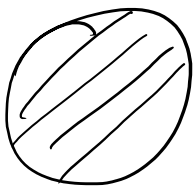
$$\int_{f(x_1)}^{f(x_2)} df = \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx$$

typ IV: x_1 och x_2 är infinitesimalt nära varandra

den 19 oktober 2020 12:59



$$x_2 - x_1 = \Delta x \rightarrow 0$$



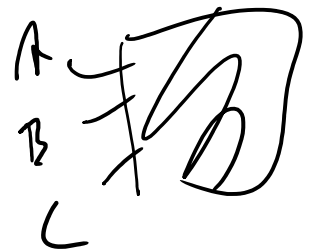
$A(r)$

$$\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{dA}{A} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{A} \approx \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{A}$$



$$df = f(x+dx) - f(x)$$

$$dx$$



$$d(x^2 + \ln x) = f(x+dx) - f(x)$$

$$f(x) = x^2 + \ln x$$

lärande mål

den 19 oktober 2020 12:35

- LM1 - kunna definiera och manipulera elementära funktioner och algebraiska uttryck
- LM2 - förklara begreppen derivata
- LM3 - förklara begreppen integral
- LM4 - förklara kopplingen mellan derivata och integral
- LM5 - kunna lösa enklare differentialekvationer
- LM6 - approximera funktioner med polynom samt framställa dem som potensserier
- LM7 - kombinera kunskaper om olika begrepp i praktisk problemlösning

def, värde, (f/g)

sep.

1:a grad
linjära
 $y' + py = q$

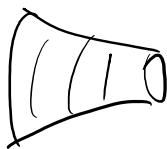
e^x
 $\sin, \cos$
 $\arcsin, \arccos$
 sh, ch
 sh^{-1}, ch^{-1}

$ay'' + by' + c = 0$

$\frac{df}{dx} \approx f'(x_0)$

Innehåll (olika moduler)

- M1 - elementära funktioner; M2 - gränsvärdesbegreppet; M3 - kontinuitet för reella funktioner; M4 - deriverbarhet för reella funktioner; M5 - medelvärdessatsen; M6 - Taylorutvecklingar och approximationer av funktioner; M7 - Riemannintegralen; M8 - primitiva funktioner och kopplingen till integraler; M9 - tillämpningar av integralberäkningar på volymer av kroppar och längden av kurvor; M10 - enklare differentialekvationer; M11 komplexa tal



$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$ax^2 + bx + c = 0$$



$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$e^x, e^{-x}, \sin x, \cos x$$

$\frac{df}{dx} \approx f'(x_0)$
 $L \cdot \frac{df}{dx} = f'(x_0)$
 $= f'(x_0)$

frågor

den 19 oktober 2020 13:59

1. Komplexa tal till polär form: Vilket form vill du se?

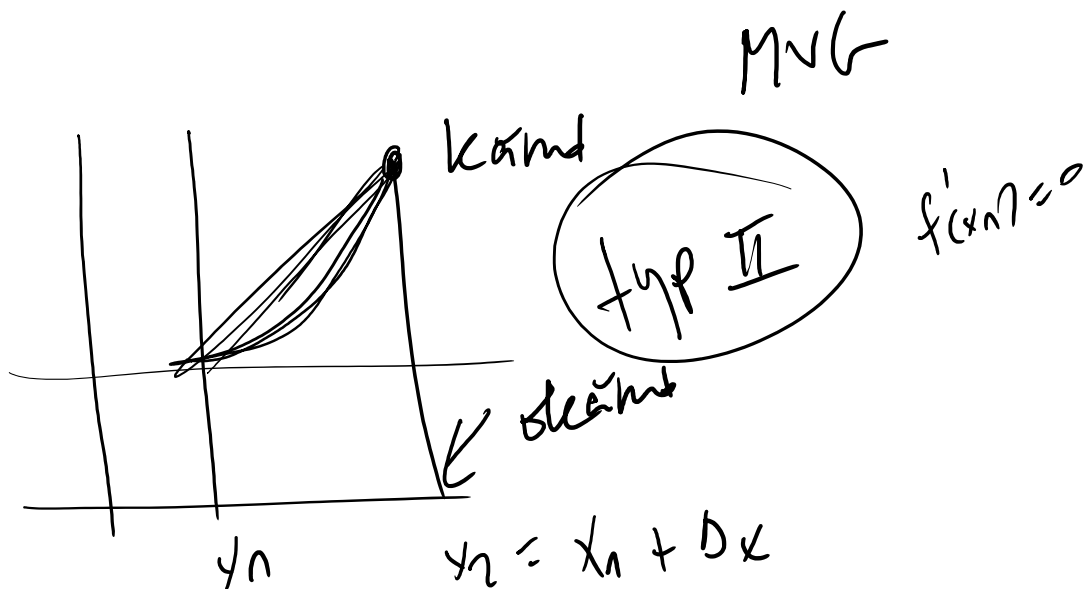
1. $Z = r \cdot e^{i \cdot \theta}$ eller
2. $Z = \cos \theta + i \cdot \sin \theta$

$$r \equiv \tilde{r}$$

$$z^{12} = (r e^{i\theta})^{12} = r^{12} e^{i12\theta}$$

$$z^{12} = [r (\cos \theta + i \sin \theta)]^{12} = r^{12} [\cos \theta + i \sin \theta]^{12} = r^{12} (e^{i\theta})^{12}$$

Kommer du bara fråga om linjära approximationer, eller ska man också approximera med högre grad med Taylor?



Jag menade videor som ligger i "Handledning för tentamen". Kommer du göra videor för all dem 5 uppgifterna?

Svar: ja.

hur funkar det med substitution med integraler då man använder $dt/dx \cdot dx/dt$?

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \quad \int \dots \frac{dt}{dx} = \left(\frac{1}{\cos t} \right)$$

Förväntas vi kunna formeln som begränsar felet i ett intervall för en Taylor utveckling? Eller är det överkurs?

Svar: man vskall veta vad den betyder

Kommer du bara fråga om linjära approximationer, eller ska man också approximera med högre grad med Taylor?
kan blir mvg

Eller är det bara appendix I som tillhör kursmålet för komplexatal
kan det komma något from appendix II på tentan?

$$O(x^2) \quad x \rightarrow 1$$

$$\begin{array}{r} G \\ \hline O(x^2) \\ \hline \sim kx^2 \end{array}$$

$$\textcircled{O(x^2)} \quad x \rightarrow 0$$

Förväntas vi kunna formeln som begränsar felet i ett intervall för en Taylor utveckling? Eller är det överkurs?

Förtydligande på begränsa felet frågan: kan det komma frågor som "uppskatta $\sqrt{1.1}$ till 5 decimalers noggrannhet". Eller är sådana frågor alltid "uppskatta $\sqrt{1.1}$ med ett 5:e grads Taylor polynom från punkten 1"?

Svar: det här skulle vara en MVG fråga i så fall, fast jag skulle omvandla den till någonting mindre teknisk så att ni förlorar inte tid på det mekaniska (att det inte blir rent "number crunching" och ingenting mera).

Kan du räkna ut en uppgift då man ska räkna ut hur stort fel det är på en approximerad funktion, för fattar inte hur man tänker när man ska välja k värde för error

Svar: skulle äta väldigt mycket tid just nu.

Jag menade videor som ligger i "Handledning för tentamen".
Kommer du göra videor för all dem 5 uppgifterna?
Svar: Ja.

Får vi kolla i boken, anteckningar bilder på telefonen, Under tentan?
Svar: ok med mig. blir det strul säg till vakter att de pratar med mig.

Men det står väl att alla verktyg är tillåtna på Chalmers hemsida? inklusive internet videos osv?

säg att man fick 13-14p (+5 dugga poäng) och alltså inte blir godkänd men ganska nära. funderade du då på att ha något tillfälle efter då man kan få försöka bli godkänd

Om man hamnar typ 1-2p ifrån betyg 4 eller 5,
skulle man kunna kontakta dig för att möjligen
kunna komplettera de sista få poängen då?