SI-pass 4

1. a) $\sqrt{1+x} < \frac{3}{2}$

Funktionen är <u>strängt</u> växande inom def. mängd.

$\Rightarrow$ Max värde av $\sqrt{1+x}$ på intervallet $-1 \leq x \leq 0$

ges vid $x = 0$ $\Rightarrow$ $\text{Max}(\sqrt{1+x}) = \sqrt{1+0} = \boxed{1 < \frac{3}{2}}$

V.S.V

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}(x+1+\frac{1}{x^2})}{\cancel{x^2}(1-\frac{1}{x^2})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x+1+\cancel{\frac{1}{x^2}}}{1-\cancel{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{1} = \boxed{\infty}$$

c) $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} - \{l'\text{hôpital}\} - \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

2.

a) $f(x) = x + 2(x+1)^2(x-1) = x + 2(x^2+2x+1)(x-1) =$

$= x + 2(x^3 + 2x^2 + x - x^2 - 2x - 1) =$

$= 2x^3 + 2x^2 - x - 2$

$\boxed{f'(x) = 6x^2 + 4x - 1}$

b) $\boxed{f'(x) = x - 2 \cdot \sin(2x)}$

c) $f'(x) = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \boxed{2 + \frac{1}{4\sqrt{x}}}$

d) $f(x) = \ln x + \ln(x^2) = \ln(x) + 2 \cdot \ln(x) = 3 \cdot \ln(x)$

$\boxed{f'(x) = \frac{3}{x}}$

3

$$f(x) = x^3 + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 + \underbrace{\cancel{\ln(1)}}_{=0} - \ln(x)$$

$$= x^3 - \ln(x)$$

söker extrempunkt.

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} = 0$$

$$3x^2 = \frac{1}{x} \Rightarrow 3x^3 = 1 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/3}}$$

Andra derivatan:

$$f''(x) = 6x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^{1/3}\right) \approx 6{,}24\ldots > 0$$

$\Rightarrow$ växande

$\Rightarrow$ Min-punkt!

$$\Rightarrow \boxed{\text{Minpunkt i } x = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/3}}$$

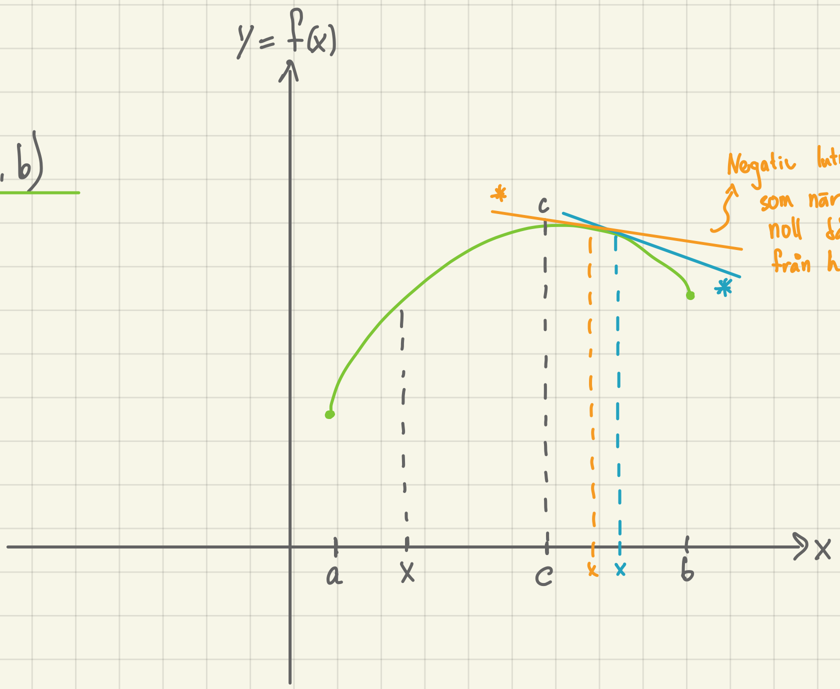
4. Veckans Quack!

För Medelvärdessatsen se boken sidan 138 sats 11.
Bevis finns på sid. 142 sats 14.

Notera att vi här har löst för maximumpunkt istället för minimumpunkt, men det är samma resonemang :)

Quacken

$f(x) \in (a, b)$



Om $f(x)$ antar ett maxvärde i punkten c $\Rightarrow$ $f(x) - f(c) \leq 0$

då x är inom intervallet (a, b)

(t_y $f(x) \leq f(c)$)

Om $c < x < b \Rightarrow$ MVS $\Rightarrow$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(c) = \lim_{x \to c_+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Om $a < x < c \Rightarrow$ MVS $\Rightarrow$

$$f'(c) = \lim_{x \to c_-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

(likt liknande resonemang som ovan)

$\Rightarrow$ $f'(c) = 0$ V.S.V