

1.

a) Se thm 11 kap 2.8

b) Se thm 11 kap 2.8

c) Om funktionen är kontinuerlig kommer det finnas åtminstone en punkt där tangentlinjen är parallell med linjen som sammanbinder funktionsvärdena i intervallets ändpunkter.

$$2. \quad a) \quad y = x^2 - 4x \quad x \leq 2$$

$$x^2 - 4x - y = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4+y}$$

$$\boxed{x \leq 2 \Rightarrow 2 - \sqrt{4+y}}$$

$$x = 2 - \sqrt{4+y}$$

$$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{4+x}$$

$$b) \quad \forall \text{ har a} \# \quad 4+x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$$

$$\therefore D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -4\}$$

$$3. \quad a) \quad x^3 - 3xy + y^3 = 1 \quad \frac{d}{dx} \Rightarrow$$

$$3x^2 - 3y - 3xy' + 3y^2y' = 0$$

$$y'(3y^2 - 3x) = 3y - 3x^2$$

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

$$y'' = \frac{d}{dx} y' \Rightarrow$$

$$y'' = \frac{(y' - 2x)(y^2 - x) - (y - x^2)(2yy' - 1)}{(y^2 - x)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{y - x^2}{y^2 - x} - 2x\right)(y^2 - x) - (y - x^2)\left(2y \cdot \frac{y - x^2}{y^2 - x} - 1\right)}{(y^2 - x)^2} =$$

$$= \frac{y - x^2 - 2xy^2 + 2x^2 - \left(2y \cdot \frac{(y - x^2)^2}{y^2 - x} - y + x^2\right)}{(y^2 - x)^2} =$$

$$= \frac{2y - 2xy^2 - 2y \cdot \frac{(y - x^2)^2}{y^2 - x}}{(y^2 - x)^2} = \frac{2y \left(1 - \frac{(y - x^2)^2}{y^2 - x} - xy\right)}{(y^2 - x)^2}$$

b) Hitta y' i termer av x och y :

$$\frac{d}{dx} (xe^y + y - 2x = \ln(2)) \Rightarrow$$

$$e^y + xe^y y' + y' - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(xe^y + 1) = 2 - e^y$$

$$y' = \frac{2 - e^y}{xe^y + 1}$$

$$\text{i } (1, \ln(2)) \quad y' = \frac{2 - 2}{2 + 1} = 0$$

$$y - y_0 = k(x - x_0) \Rightarrow y = \ln 2$$

$$c) \quad f(f^{-1}(x)) = x \quad \frac{d}{dx} \Rightarrow f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$d) \quad \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(y)} =$$

$$\stackrel{\text{trig. ettan}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\left(\text{ty } y = \arcsin x \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos y \geq 0 \right)$$

4. a) $\ln(\ln(x)) = 1$

$$e^{\ln(\ln(x))} = e^1$$

$$\ln x = e^1$$

$$e^{\ln x} = e^{e^1}$$

$$x = \underline{\underline{e^e}}$$

b) $f(x) = 2e^x - (x^8)^2 \cdot 8^{(x^2)}$

$$f(x) = 2e^x - x^{16} \cdot e^{\ln 8^{(x^2)}} = 2e^x - x^{16} \cdot e^{x^2 \cdot \ln 8}$$

produkt och
kedjeregler

$$f'(x) = 2e^x - 16x^{15} \cdot e^{x^2 \ln 8} - x^{16} \cdot e^{x^2 \ln 8} \cdot \frac{d}{dx}(\ln 8 \cdot x^2) =$$

$$= 2e^x - 16x^{15} \cdot 8^{(x^2)} - x^{16} \cdot 8^{x^2} \cdot 2 \ln 8 \cdot x = 2e^x - x^{15} 8^{(x^2)} (16 + 2 \ln 8 x^2) \underline{\underline{\quad}}$$

5. a) i) när ett polynom och en exponential
går mot oändligheten respektive 0 eller
vice versa, vinner exponentialen.
- ii) när ett polynom och en logaritm
går mot oändligheten respektive 0 eller
vice versa, vinner polynomet.

Se thm 5 kap 3.4

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-3} e^x = \infty$, $x^{-3} \rightarrow 0$, $e^x \rightarrow \infty$
exponenten "vinner"

- c) Sätt $y = g(x)$, y är ^{strikt} avtagande för
ökande x . Om $f(x)$ är strikt avtagande
för ökande x växer den för minskande
 x . $f \circ g = f(g(x)) = f(y) = f(y)$ är
strikt växande för y är strikt avtagande
för ökande x . så $f \circ g$ är strikt
växande på $\mathbb{R}$.

För ett mer rikligt matematiskt resonemang
se lösningsförslag till tenta 141030
uppgift 6 c)