SI-pass 6

Tenta 2018-10-31 upg. 7

(a, b) $\quad f'(x) = 0$

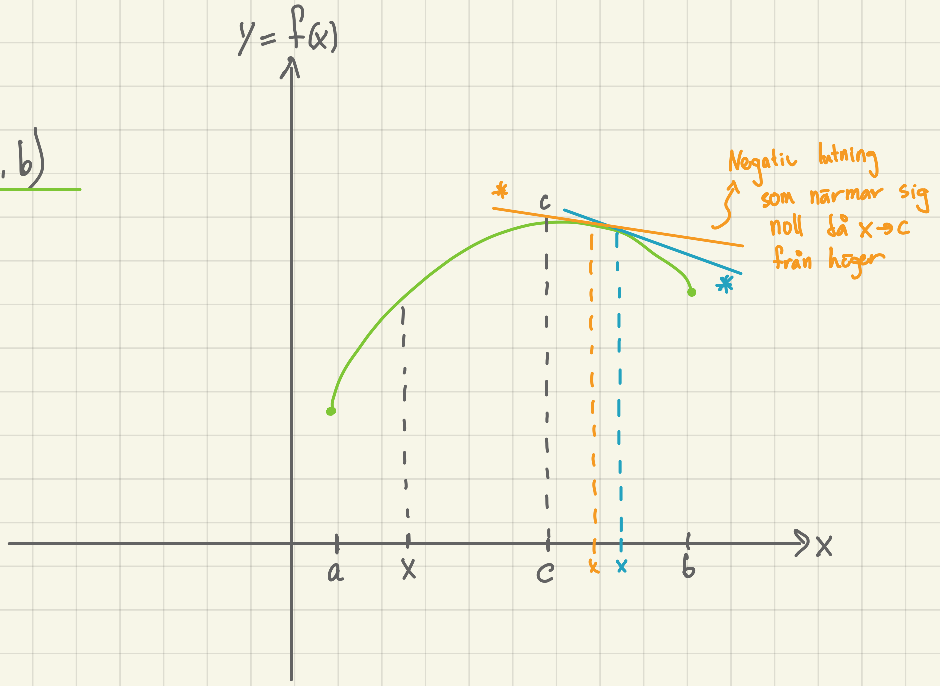
MVS: $\quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c) = 0$

$\Rightarrow \quad f(x) - f(x_0) = 0 \quad \forall \; x \in I$, ty $c \neq x_0$, $c \neq x$

(sats 13)

upg. 2

$f(x) \in (a, b)$



Om $f(x)$ antar ett maxvärde i punkten c $\Rightarrow$ $f(x) - f(c) \leq 0$

då x är inom intervallet (a,b)

$(\text{ty } f(x) \leq f(c))$

Om $c < x < b$ $\Rightarrow$ MVS $\Rightarrow$

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \;*\quad \Rightarrow \quad f'(c) = \lim_{x \to c_+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \;*$$

Om $a < x < c$ $\Rightarrow$ MVS $\Rightarrow$

$$f'(c) = \lim_{x \to c_-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

(likt liknande resonemang som ovan)

$\Rightarrow$ $f'(c) = 0$ V.S.V

Tenta 2018 okt. ε/δ

a)

DEFINITION 8

A formal definition of limit

We say that $f(x)$ **approaches the limit** L as x **approaches** a, and we write

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{or} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = L,$$

if the following condition is satisfied:
for every number $\epsilon > 0$ there exists a number $\delta > 0$, possibly depending on ϵ, such that if $0 < |x-a| < \delta$, then x belongs to the domain of f and

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

För alla tal $\varepsilon > 0$ $\exists$ ett $\delta > 0$, möjligen $\delta = f(\varepsilon)$, s.a om $0 < |x-a| < \delta$, tillhör x definitionsmängden av f & $|f(x) - L| < \varepsilon$ är uppfyllt.

b) $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$. Vi bevisar nu detta med def. ovan!

Antag ett givet $\varepsilon > 0$ & ett intervall $|x-c| < \delta$, där $c = 2$.

Vi vill finna ett δ s.a $|x-2| < \delta$ uppfyller $|f(x) - L| < \varepsilon$, $L = 8$.

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + ax + b) = x^3 + \cancel{ax^2} + bx - \cancel{2x^2} - 2ax - 2b$$

$a = 2$ $\quad$ $b = 4$

$\Rightarrow$ $|(x-2)(x^2+2x+4)| < \delta\,(x_0^2 + 2x_0 + 4)$. Vad bör x_0 vara?

Vi kräver att $\delta \leq 1$ för att kontrollera att (x^2+2x+4) inte blir för stor.

$\Rightarrow$

$$|x-2| < 1$$

$$\Rightarrow \quad -1 < x - 2 < 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 < x < 3 \quad \Rightarrow \quad 7 < x^2 + 2x + 4 < 19$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = 3$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad |(x-2)(x^2+2x+4)| < \delta(3^2+2\cdot 3+4) = 19\delta$$

$$\Rightarrow \quad 19\delta = \varepsilon$$

$$\delta = \varepsilon/19$$

Välj således $\delta = \min(1, \varepsilon/19) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ uppfylls.

$\boxed{\text{Side note:}}$ Låt oss nu säga att vi vill ligga $\pm\ \varepsilon = 0{,}1$ från $f(2) = 8$.

$$\delta = \min(1, 1/190) \Rightarrow \delta = 1/190$$

$$|x-2| < 1/190$$

$$\Rightarrow \quad -1/190 < x-2 < 1/190$$

$$\Rightarrow \quad \frac{379}{190} < x < \frac{381}{190}$$

Detta innebär för $|x^3 - 8| < \varepsilon = 0{,}1$: T.ex $x = \dfrac{380{,}5}{190}$

$$\left|\left(\frac{380{,}5}{190}\right)^3 - 8\right| < 0{,}1 \ ?$$

$$|\approx 0{,}03| < 0{,}1 \ \checkmark$$

Tenta 2018-10-31 Upg. 2

i) $\begin{cases} P_1 = (-1,1,0) \\ P_2 = (0,-1,1) \\ P_3 = (1,1,-1) \end{cases}$ $\quad Q = (1,2,3)$

$$\vec{P}_{12} = P_1 - P_2 = \begin{bmatrix} -1-0 \\ 1-(-1) \\ 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{P}_{13} = P_1 - P_3 = \begin{bmatrix} -1-1 \\ 1-1 \\ 0-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalen:

$$\vec{n} = \vec{P}_{12} \times \vec{P}_{13} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = i(2-0) - j(-1-2) + k(0+4) = \underbrace{2}_{A}i + \underbrace{3}_{B}j + \underbrace{4}_{C}k$$

Planets ekv. som går genom punkten Q
ges då av:

$$A(x-1) + B(y-2) + C(z-3) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2 + 3y - 6 + 4z - 12 = 0$$

$$\boxed{2x + 3y + 4z = 20}$$

ii) $\begin{cases} 7x - 3y - 8z = 34 & (1) \\ x - 2y + 2z = -3 & (2) \end{cases}$

$\vec{n}_1 = 7i - 3j - 8k$

$\vec{n}_2 = i - 2j + 2k$

$$\vec{V} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 7 & -3 & -8 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = i(-6-16) - j(14+8) + k(-14+3) = -22i - 22j - 11k =$$

$$= \underbrace{-11}_{\text{skalär}}(2i + 2j + k)$$

skalär → Påverkar ej lutning. endast riktning och längd.

Fix $z = 0$: (1): $7x - 3y - 0 = 34$

(2): $x - 2y + 0 = -3 \Rightarrow x = 2y - 3$

$$\Rightarrow 7(2y-3) - 3y = 34$$

$$14y - 21 - 3y = 34$$

$$11y = 55 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow x = 7$$

$\Rightarrow$ Punkt på skärningslinje: $P(7,5,0)$

Pga av underbestämd.

$$\Rightarrow \text{skärningslinje ges av: } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P + t \cdot \vec{V} = \boxed{\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \forall t}$$

iii)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P + t \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall t$$

Avståndet : $s = \dfrac{|\overbrace{(P_0 - P)}^{\vec{r}} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$

$$\vec{r} = P_0 - P = \begin{bmatrix} 4-7 \\ -1-5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -3 & -6 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = i(-6) - j(-3) + k(-6+12) = -6i + 3j + 6k$$

$$|\vec{r} \times \vec{v}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{81} = 9$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

$\Rightarrow$ $\boxed{s = \frac{9}{3} = 3}$