Skissa graf

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x}$, ej definierad i $x = 0$ samt då $x^2 - 3x + 2 < 0$ $\Rightarrow$ $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

$x_1 = 1$
$x_2 = 2$

Defenitionsmängden blir: $D_f = \{ x \in R \setminus \{ 0 \cup (1,2) \} \}$

$$f'(x) = \{\text{kvotregeln, kjedjereg.}\} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)}{\sqrt{x^2-3x+2}} \cdot x - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \right) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} - \frac{3}{2}x - \cancel{x^2} + 3x - 2}{x^2 \sqrt{x^2 - 3x + 2}} = \frac{\frac{3}{2}x - 2}{x^2 \sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

Nollställen: $\frac{3}{2}x - 2 = 0$

$x = \frac{4}{3}$ $\Rightarrow$ Ej med i defenitionsmängd.

Vi kollar gränsvärden:

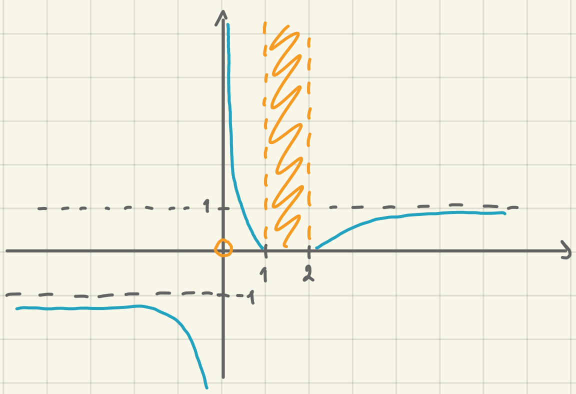
$\lim\limits_{x \to \pm 0} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x} = \pm \infty$ (ty x mycket litet i nämnaren)

$\lim\limits_{x \to \pm \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x} = \lim\limits_{x \to \pm \infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \pm 1$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x} = 0$ $\Rightarrow$

x	$-\infty$		0		1		2		∞
f'		$-$		$-$				$+$	
f	-1	$\searrow$		$\searrow$				$\nearrow$	1

$\lim\limits_{x \to +2} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x} = 0$



3

a) $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ s.a. omm $0 < |x-a| < \delta$,
då gäller att $|f(x) - L| < \varepsilon$.

b) $\lim_{x \to 2} \overbrace{x^2}^{f(x)} = \overbrace{4}^{L}$

Välj godtyckligt ett ε s.a $0 < |x-2| < \delta$ så gäller

att $|f(x) - L| < \varepsilon$.

$\Rightarrow |f(x) - L| = |x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)|$, antag $\delta \leq 1$.

$0 < |x-2| < \delta \leq 1$

$(x+2)$ alltid mindre än 5!

$-1 \leq x - 2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow 3 \leq \boxed{x + 2 \leq 5}$

$|\underbrace{(x-2)}_{<\delta}\underbrace{(x+2)}_{<5}| < \delta \cdot 5 = 5\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \varepsilon/5$

$\therefore$ Välj $\delta = \min(1, \varepsilon/5) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ är uppfyllt!

v.s.v. ■

4

a) $P_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$, $P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\overrightarrow{P_3P_1} = P_3 - P_1 = \begin{bmatrix} 1-4 \\ 7/2 + 1/2 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_2P_1} = P_2 - P_1 = \begin{bmatrix} 1/2 - 4 \\ 3/2 + 1/2 \\ 5/2 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/2 \\ 2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_{21}} \times \overrightarrow{P_{31}} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -7/2 & 2 & 5/2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = i(2-10) - j\left(-\frac{7}{2} + \frac{15}{2}\right) + k\left(-\frac{28}{2} + \frac{12}{2}\right)$$

$$= -8i - 4j - 8k =$$

$$= -4(2i + j + 2k)$$

$\Rightarrow$ Planets ekv: $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = D.$

$$\Rightarrow \quad 2(x-4) + (y + 1/2) + 2(z-0) = 0$$

$$2x + y + 2z = \frac{15}{2} \Rightarrow \boxed{4x + 2y + 4z = 15}$$

4b) Planet π_1 som är parallellt med planet $4x+2y+4z=15$ och innehåller punkten $P_0=(1,2,4)$ ligger på avståndet:

$$d = \frac{|4\cdot1+2\cdot2+4\cdot4-15|}{\sqrt{4^2+2^2+4^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{36}} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

c) Planet π_1 har ekvation: $\boxed{4x+2y+4z=D\text{ , där } D=24.}$

Punkten Q som ligger längs normallinjen: ℓ : $(x,y,z) = P_0 + t(2,1,2)$

är punkten närmast P_0 och ligger i planet π (plan från uppift a)).

Q uppfyller ekv: $4(1+2t)+2(2+t)+4(4+2t) = 15$ Planets ekv.

$\Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow Q = P_0 - \frac{1}{2}(2,1,2) = (0,\frac{3}{2},3)$

Dubbelkolla att π_1 ligger på avstånd $\frac{3}{2}$ från π.

Punkten $\tilde{P}$ som ligger längs normallinjen ℓ på andra sidan π, med avståndet $3/2$ till π, har koordinatorna: $\tilde{P} = \overrightarrow{O\tilde{P}} = \overrightarrow{OP_0} + 2\overrightarrow{P_0Q} =$

$$= (1,2,4) + 2(-1,-1/2,-1) = (-1,1,2) \Rightarrow \tilde{P} = (-1,1,2)$$

Eftersom π_2 är parallellt med π och innehåller $\tilde{P}$ så ges π_2 av:

$$\boxed{4x+2y+4z=6}$$

Dubbelkolla att π_2 ligger på avstånd $\frac{3}{2}$ från π.

Gränsvärden

a) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\right)\sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\cancel{x}+4-\cancel{x})\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{4\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)} = \frac{4}{2} = 2$$

l'hopital

b) $$\lim_{x\to 0_+}\frac{2\ln(1+\sqrt{x})-2\sqrt{x}+x}{\sin(\sqrt{x})-\sqrt{x}} = \left\{\text{Sätt } t=\sqrt{x}\right\} = \lim_{t\to +0}\frac{2\ln(1+t)-2t+t^2}{\sin(t)-t} = "\frac{0}{0}" =$$

$$= \lim_{t\to 0_+}\frac{\frac{2}{1+t}-2+2t}{\cos(t)-1} = \lim_{t\to 0_+}\frac{-\frac{2}{(1+t)^2}+2}{-\sin(t)} = \lim_{t\to 0_+}\frac{\frac{4}{(1+t)^3}}{-\cos(t)} = -4$$

, alltså l'hopital tre gånger...