

.....

Omtenta i MVE460: Envariabelanalys och analytisk geometri

Onsdag 8:e januari 2020, 8:30–12:30

Lösningar

.....

1. Visa att om funktionen f är deriverbar i en punkt a i D_f så är f också kontinuerlig i a . (6p)

Lösning: Se Adams s. 109.

2. Visa att $u \cdot v = |u||v| \cos \theta$, där θ är den mellanliggande vinkeln mellan vektorerna u och v . (6p)

Lösning: Se Adams s. 581.

3. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$. Ange alla eventuella lokala extrempunkter, inflektionspunkter och asymptoter, samt bestäm på vilka intervall funktionen är växande respektive avtagande och konvex respektive konkav. (10p)

Lösning: Observera först att nämnaren $x^2 - 1$ är noll, när $x = \pm 1$. Därför $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Lodräta asymptoter: Undersöka först $x = -1$. Där $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$. För $x = 1$, har vi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. Alltså, finns lodräta asymptoter i $x = -1$ och $x = 1$.

Vågräta asymptoter: Observera att om $x \neq 0$ och $x \neq \pm 1$,

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

Därför $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Så linjen $y = 0$ är en vågrät asymptot när $x \rightarrow \pm\infty$.

Sneda asymptoter: Finns inga, eftersom asymptoten när $x \rightarrow \pm\infty$ är vågrät.

Vi ska nu leta efter lokala extrempunkter:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2}.$$

Den är aldrig noll, eftersom $1 + x^2 > 0$, så finns inga extrempunkter.

För att hitta möjliga inflektionspunkter vi räknar

$$f''(x) = -\frac{2x(x^2 - 1)^2 - (x^2 + 1)4x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = -\frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)4x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}.$$

Vi ser att $f''(x) = 0$, när $2x^3 + 6x = 2x(x^2 + 3) = 0$, dvs. när $x = 0$. Punkt 0 är en möjlig inflektionspunkt.

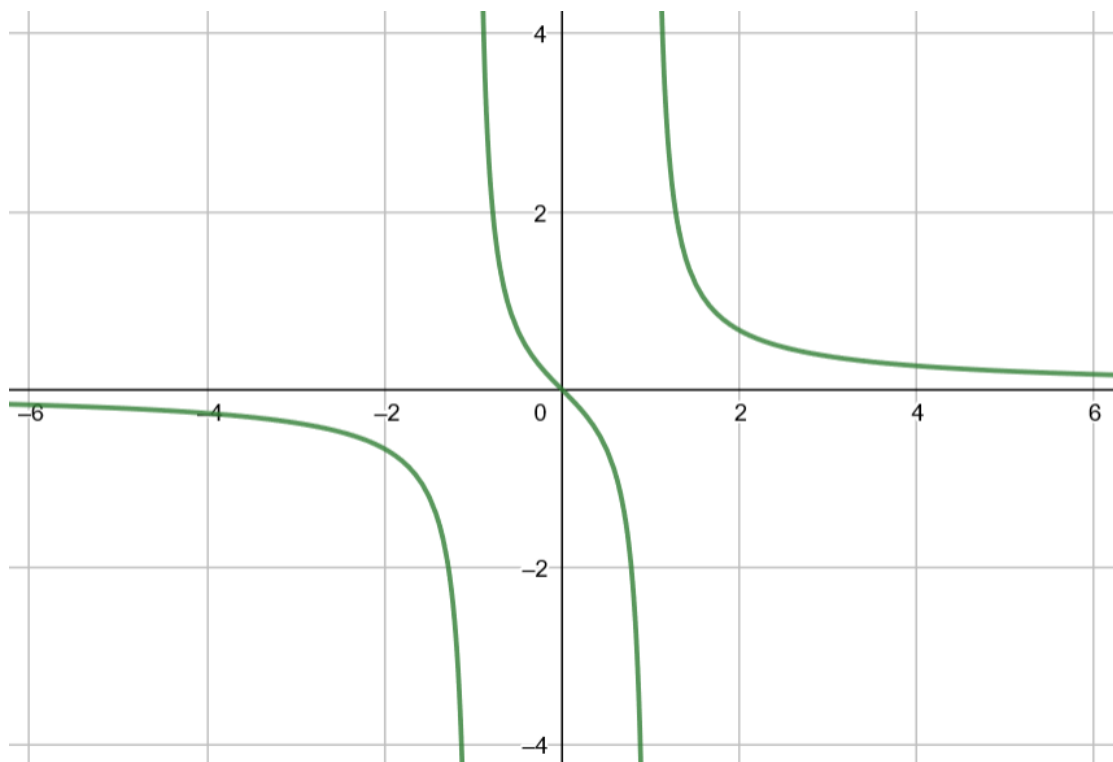
Teckentabell:

x		-1		0		1	
f'	-	ej def.	-	-	-	ej def.	-
f''	-	ej def.	+	0	-	ej def.	+
f	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	ej def.	$\searrow$
f	$\cap$	ej def.	$\cup$	ip.	$\cap$	ej def.	$\cup$

Från teckentabell, vi ser att 0 är en inflektionspunkt, eftersom f byter från konvex till konkav.

Från teckentabell, vi ser att f är avtagande i varje delintervall av D_f : $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ och $(1, \infty)$. Vi ser också, att f är inte växande på någon intervall.

Också, f är konvex i $(-1, 0)$ och $(1, \infty)$, och konkav i $(-\infty, -1)$ och $(0, 1)$.



4. Beräkna Taylorpolynomet för $f(x) = \ln(1+x^2)$ av ordning 4 kring $x = 0$. (6p)

Lösning: Taylorpolynomet av f av ordning 4 kring $x = 0$ ges av:

$$P_4(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4.$$

Vi räknar:

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{4x^3-12x}{(1+x^2)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{(12x^2-12)(1+x^2)-6x(4x^3-12x)}{(1+x^2)^4}$$

Så, $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f^{(3)}(0) = 0$ och $f^{(4)}(0) = -12$. Därför

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = x^2 - \frac{x^4}{2}.$$

5. Beräkna gränsvärdet

(6p)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{x^2}.$$

Lösning: Skriv $x^2 = e^{\ln(x^2)}$. Då $(x^2)^{x^2}$ blir $e^{x^2 \ln(x^2)} = e^{y \ln(y)}$ där $y = x^2$. Vi ser att

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{x^2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} e^{y \ln(y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} e^{f(y)},$$

där $f(y) = y \ln(y)$. Eftersom $t \mapsto e^t$ är kontinuerlig, vi vet att om $\lim_{y \rightarrow 0^+} f(y) = A$ existerar, då $\lim_{y \rightarrow 0^+} e^{f(y)} = e^A$.

Observera nu att

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} f(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln y}{\frac{1}{y}} = \frac{-\infty}{\infty},$$

som är en obestämd uttryck. Vi får använda l'Hôpitals regeln (dvs. ta derivator av täljaren och nämnaren) och få

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} f(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{y}}{-\frac{1}{y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} -y = 0.$$

Det följer att

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2)^{x^2} = e^0 = 1.$$

I denna uppgift man kunde ju räkna gränsvärden direkt med x variabeln. Också, gränsvärdet $\lim_{y \rightarrow 0^+} y \ln(y)$ behöver inte motiveras så mycket, eftersom vi har gått genom de typiska gränsvärden i föreläsningar.

6. Bestäm ekvationen för planet som innehåller punkterna $A = (1, 0, 3)$, $B = (1, 5, 6)$ och $C = (3, 2, 0)$. (6p)

Lösning: Planet innehåller vektorer $\overrightarrow{AB} = 5j + 3k$, och $\overrightarrow{AC} = 2i + 2j - 3k$. Vi kan hitta normalen med hjälp av kryssprodukt

$$n = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -21i + 6j - 10k.$$

Planet består om alla punkter $P = (x, y, z)$, för vilken $\overrightarrow{AP} = (x-1)i + (y-0)j + (z-3)k$ är vinkelrät mot n . Denna kondition kan vi undersöka med hjälp av skalärprodukt:

$$\overrightarrow{AP} \cdot n = -21(x-1) + 6(y-0) - 10(z-3) = 0.$$

Alltså, planet ges av

$$21x - 6y + 10z = 51.$$

7. Hitta en enhetsvektor w som är vinkelrät mot båda $u = i - 2j + k$ och $v = -i + 4j + k$.
(6p)

Lösning: Vi först hittar en vektor n som är vinkelrät mot v

$$n = u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6i - 2j + 2k.$$

Vi räknar $|n| = \sqrt{36 + 4 + 4} = 2\sqrt{11}$. Vi ser att

$$w = -\frac{1}{\sqrt{11}}(3i + j - k)$$

är en enhetsvektor som är vinkelrät mot u och v . Visst $-w$ passar också.

8. Visa att funktionen $f(x) = \ln(x)e^{-x^2}$ med definitionsmängd $D_f = (0, \infty)$ tar sitt största värde i $(0, \infty)$, men tar inte sitt minsta värde i $(0, \infty)$.
(4p)

Lösning: Observera att $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. Från denna observation, det följer att f inte tar sitt minsta värde i $(0, \infty)$.

Observera att $f(e) = e^{-e^2} > 0$, och att $f(x) < 0$, om $x \in (0, 1)$. Det är klart att $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Därför, hittar vi $M > 0$, så att $f(x) < e^{-e^2}$, om $x > M$. Det följer att det största värdet kan inte hittas i (M, ∞) .

Det största värdet (om det finns) hittas därför i $[0, M]$. Men, eftersom f är kontinuerlig, f tar största värdet i en sluten intervall $[0, M]$.

.....