

MVE 460 Envariabelanalys och Analytisk Geometri (Calculus)

Föreläsning 1.1 (2020/09/01)

1. Information om kursen
2. Notation
3. Översikt över kursen
4. Mål: Schemat $\rightarrow$ 1 Gränsvärde
 2. Högre / vänster gränsvärde
 3. Räkner regler
 4. Instängningssatsen

1. Canvas: PM-fil med kurslitteratur

Länkerna för zoom-möter

- Elevers gruppen delas upp med samma kriterier och namn som gjordes under Introduktionskurs (Prof Björn Åkerman - Kriterium)

• K-K1-K3 • Kf • Bt1-3

• K-K4-K6 • Bt4-5

Varje grupp har olika Övnings- och Datorledare

(Titta på tabel på Canvas)

Dator uppgift på Möbius

Böcker är viktig. Alla uppgifter är från Böcker

2. Notation (Samma att vi använde på Introduktionskurs)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ naturliga tal

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ heltal

$\mathbb{Q} = \{x = p/q, q \neq 0 / p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\}$

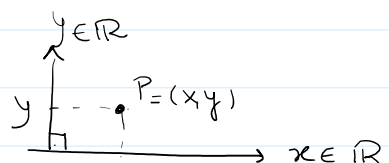
$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) = \text{reel tal}$ $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} / x \notin \mathbb{Q}\} = \{x \neq p/q, q \neq 0, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\}$

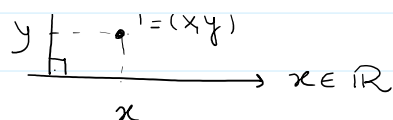
$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \text{irrationella tal}$

$\mathbb{I} = \{\dots, -\pi, \dots, -e, \dots, e, \dots, \pi, \dots\}$

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$



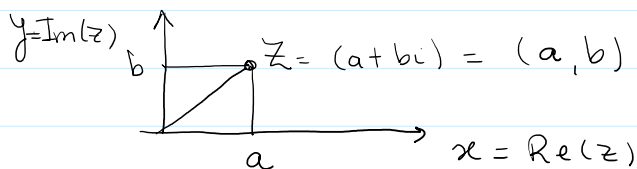
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$



$\mathbb{C}$ = komplexa tal

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

$$z = a + bi \leftrightarrow P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$$



2.1 Notation

$$f: D_f \rightarrow V_f$$

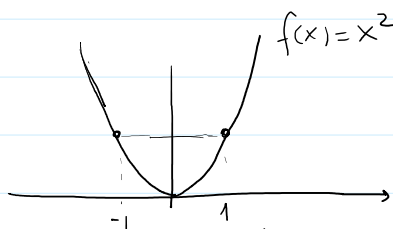
$$x \mapsto f(x)$$

D_f = Definitionsmängden för $f(x)$
 V_f = Värdomängden för $f(x)$

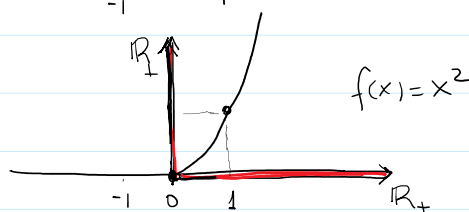
Det är viktigt att kolla på D_f . Det kan byta hur man förstår f , rita graf av f och kan räkna med f .

Ex $f: D_f \rightarrow V_f$
 $x \mapsto f(x) = x^2$

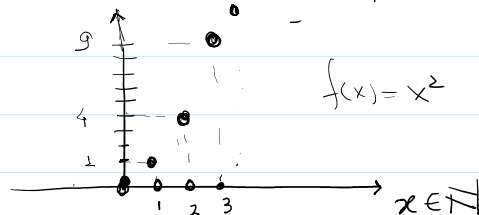
a) $D_f = \mathbb{R}$ $V_f = \mathbb{R}_+$



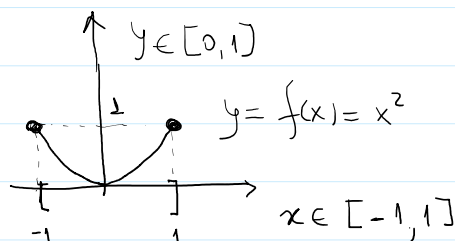
b) $D_f = \mathbb{R}_+$ $V_f = \mathbb{R}_+$



c) $D_f = \mathbb{N}$ $V_f = \mathbb{N}$



d) $D_f = [-1, 1]$ $V_f = [0, 1]$

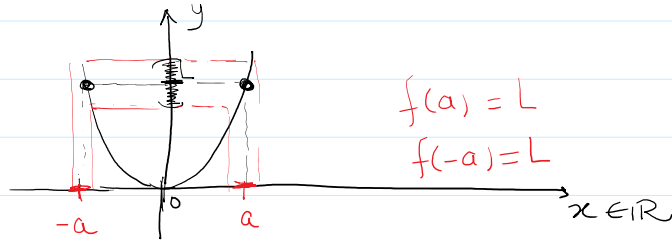


e) När man tittar först till V_f , då kan det medför ett beteckande eller begränsning till x

2) När man tittar först till V_f , så kan det medför ett beteende eller begränsning till x

$$f: D_f \rightarrow V_f$$

$$x \rightarrow x^2$$



$$G_L = (L-T, L+T), T > 0 \Rightarrow$$

$$\text{Existerar } (-a-k, -a+k) = I_1$$

$$(a-s, a+s) = I_2$$

så att $x \in I_1$ eller $x \in I_2$

$$\text{vi har } f(x) \in G_L = (L-T, L+T)$$

3. Översikt över kursen (Calculus)

Tänkar före Calculus

• Algebra och geometri
som tolkar förhållanden mellan
statiska mängder

Tänkar efter Calculus

Newton (1642-1727) $\rightarrow y'(x)$

Leibniz (1646-1716) $\rightarrow \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}f(x)$

De arbetade oberoende av varandra:

Deras arbete skapade en förmåga

att analysera Rörelse och

att förstå hur mängder varierar
med tiden.

Hur brukar man presentera ideer, när man tänkar på
matematiska begrepp?

Siffror: Operationer + Restriktioner

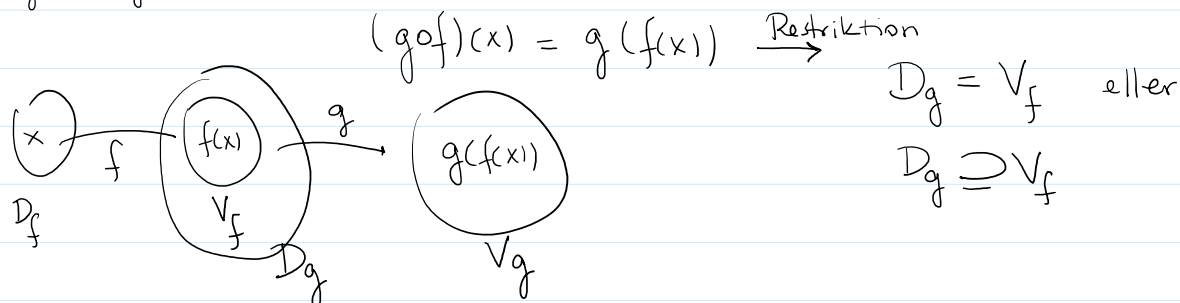
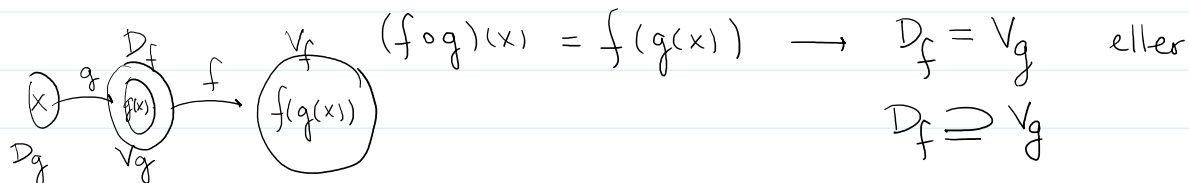
Ex: $\frac{a}{b} \rightarrow b \neq 0$

Ex: $\sqrt{a} \rightarrow a \geq 0$

Funktioner: Operationer $\rightarrow$ Restriktioner

Ex: $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow g(x) \neq 0$

$$\sqrt{x} \rightarrow x \geq 0$$



- Vad händer med nya begrepper som vi ska lära oss på Calculus kursen? Samma sak! Vi ska ha Regler och Restriktioner så att vi kan räkna och konstruera teori

Nya viktiga begrepp

Alice Kozakevicius at 2020-09-01 18:30

- Gränsvärde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$
- Derivata $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- Integration $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n^*) (x_n - x_{n-1})$
 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$
 $x_n^* \in (x_{n-1}, x_n)$

Men: Vilka är Restriktioner och Reglerna?

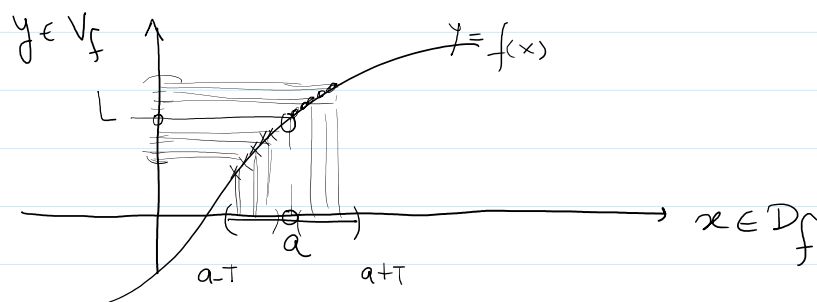
Vi ska se!!!

- F1.1. Mål:
- Adams §1.2-13
- Kapitel 1.
1. Gränsvärde (Informella Definitionen)
 2. Höger/Vänster Gränsvärde
 3. Räkneregler
 4. Instängningsatsen

$$1. f: D_f \rightarrow V_f$$

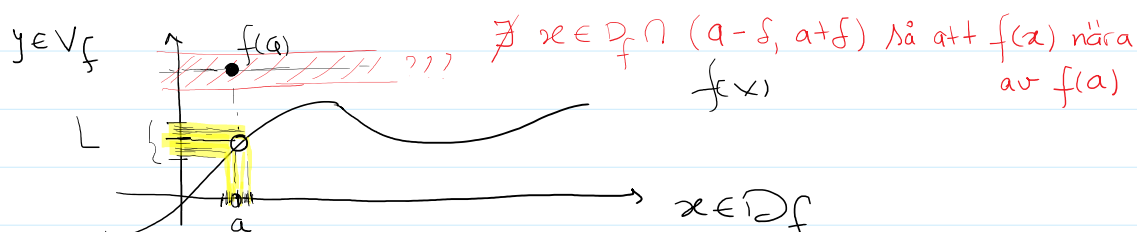
$$x \mapsto f(x)$$

En omgivning av a är en Intervall med alla värden x som $d(x, a) < T$ ($|x - a| < T$), men x behöver inte vara lika med a .

$$G_a = I_a = (a - T, a) \cup (a, a + T)$$


Definition: L är gränsvärde av f i en omgivning av a
OM $f(x)$ går mot L , när x går mot a
 (så nära som "man" vill, utan att vara lika med a)

Obs: Det är L som vill!



För alla distanser så nära som " L vill",
 kan man hitta x nära a så att
 $f(x)$ nära L .

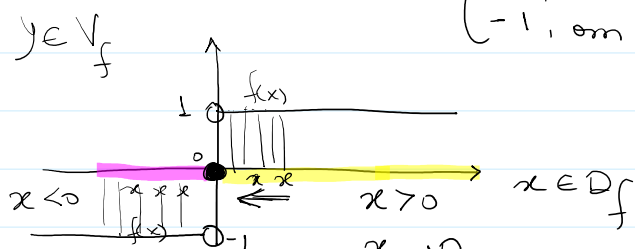
2) Höger / Vänster gränsvärde.

$$\text{Ex: } f: D_f \rightarrow V_f$$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } x > 0 \\ 0, & \text{om } x = 0 \\ -1, & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$V_f = \{-1, 0, 1\}$$



$$x \rightarrow 0_- \quad x \rightarrow 0_+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) = 1 = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} f(x) = -1 = L_2$$

$$f(x)|_{x=0} = 0 \neq 1 = L_1$$

$$\neq -1 = L_2$$

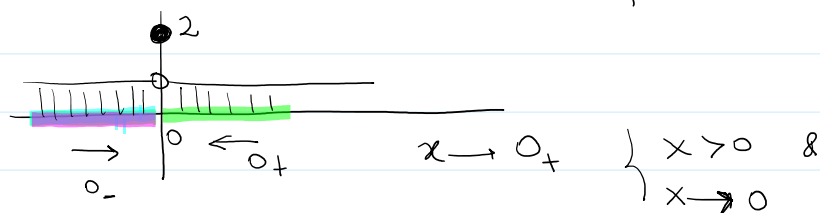
Har f en $L \equiv$ gränsvärde när $x \rightarrow 0$?

Svar: Nej

Ex 2.2

$$g(x) : D_g \rightarrow V_g$$

$$x \rightarrow g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$



$$x \rightarrow 0_-$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\text{Så } \lim_{x \rightarrow 0_+} g(x) = 1 = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} g(x) = 1 = L_2 \quad \Bigg] =$$

$$g(x)|_{x=0} = g(0) = 2$$

Även om $g(0) = 2 \neq L$

L är gränsvärde av $g(x)$ när x går mot 0 för båda sidor.

Satsen 1 sidan 68.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a_-} f(x)$$

OM och endast OM

OM och endast OM

$$\Rightarrow \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \right] \Rightarrow \left[\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a_-} f(x) \right]$$

$$\Leftarrow \left[\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a_-} f(x) \right] \Rightarrow \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \right]$$

3) Reglerna för att räkna/arbete med gränsvärde

Satsen 2 Sidan 69

$$\text{[OM]} \quad \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M, k \in \mathbb{R} \text{ konstant värde} \right]$$

$$\text{[DÅ]} \quad 1, 2, 3) \quad \lim_{x \rightarrow a} \left[f(x) \begin{matrix} + \\ - \\ \cdot \end{matrix} g(x) \right] = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \begin{matrix} + \\ - \\ \cdot \end{matrix} \left[\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right] = L \begin{matrix} + \\ - \\ \cdot \end{matrix} M$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow a} [k f(x)] = k \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] = k \cdot L$$

$$5) \quad \text{OM } M \neq 0, \text{ då } \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]}{\left[\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right]} = \frac{L}{M}$$

$$6) \quad \text{OM } m, n \in \mathbb{N}, \text{ då } \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{m/n} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{m/n} = L^{m/n} \quad (*)$$

Observera att

$L \geq 0$ måste vara positiv, när $n \equiv$ jämt nummer $\text{ex } (L)^{1/n} = \sqrt[n]{L}$

$L \neq 0$, OM $m < 0$ $\text{ex } (L)^{-1} = \left(\frac{1}{L} \right) \quad L \neq 0$

$$7) \quad \text{[OM]} \quad \left[f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in G_a = (a-T, a) \cup (a, a+T) \right]$$

 $T > 0$

$$\text{[DÅ]} \quad L = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$$

OBS: OM $f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \dots \leq f_n(x)$

Då är regel (7) fortfarande giltig.

Här $f(x)$, $g(x)$ är alla funktioner som vi kan tänka på.

Men, när $f(x)$ och $g(x)$ är polynomiella funktioner,
Har vi den där satsen:

Satsen 3 sidan 70

$$(a) \text{ Om } \begin{cases} f(x) = p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 & a_n \neq 0, a_i \in \mathbb{R} \quad i=0,1,\dots,n \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Då } \lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a) \quad (L = p(a) = \underline{\text{speciell värde!}})$$

(b) alla reglerna från satsen 2 är giltiga

$$\otimes \quad p(x), q(x), q(x) \neq 0, q(a) \neq 0$$

$$\text{Då } \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{p(x)}{q(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} p(x)}{\lim_{x \rightarrow a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$$

Exempel:

$$a) \quad p(x) = x^2 - 1 \quad q(x) = x - 1 \quad a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} p(x) = (1)^2 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} q(x) = (1) - 1 = 0 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} p(x) + q(x) = 0 + 0 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} p(x) - q(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) - (x - 1) = \cancel{x^2} - \cancel{x} - \cancel{x} + x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Men Här har vi problemet

därför att $q(1) = 0$ och $q(x)$ är nämnare

Så måste man faktorisera:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(\cancel{x-1})(x+1)}{(\cancel{x-1})} = (x+1)$$

$$x-1 = \frac{x^2-1}{x+1}$$

$$\text{Och } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2-1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2.$$

$$\text{Ex: } p(x) = x^2 + x - 2 \quad q(x) = x^2 + 5x + 6$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} p(x) = (-2)^2 + (-2) - 2 = 4 - 4 = 0 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} q(x) = (-2)^2 + 5(-2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{Men } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(-2)}{q(-2)} = \frac{0}{0} \quad \text{Man kan inte dividera med noll.}$$

Lösning: En gång till försöker vi att faktorisera.

$$p(x) = (x-1)(x+2) \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$q(x) = (x+2)(x+3) \quad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \begin{cases} \frac{-5+1}{2} = -2 \\ \frac{-5-1}{2} = -3 \end{cases}$$

Så kan man fortsätta

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{p(x)}{q(x)} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-1)}{(x+3)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -2} (x-1)}{\lim_{x \rightarrow -2} (x+3)} = \frac{(-2-1)}{(-2+3)} = \frac{-3}{1} = -3 = L = \text{gränsvärde} \end{aligned}$$

4) Instängningsatsen (Det kommer som en konsekvens av Reglerna)

Satsen 4 sidan 71

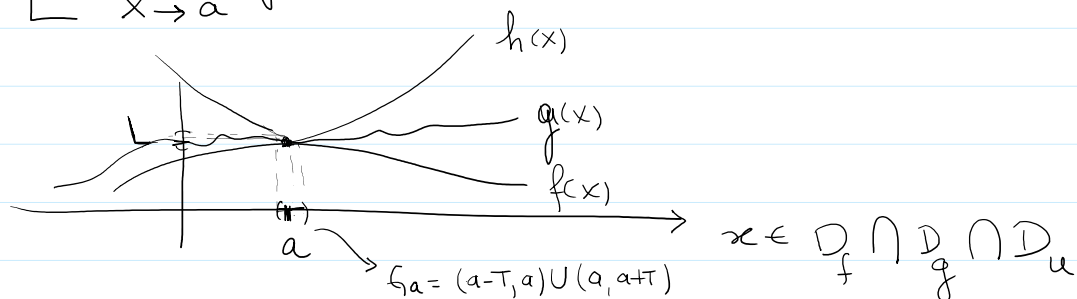
$$\boxed{\text{OM}} \quad \begin{cases} 1) f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in G_a = (a-T, a) \cup (a, a+T) \\ 2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x) \end{cases} \quad \text{att } \left(\overset{x}{\text{|||||}} \overset{a}{0} \overset{x}{\text{|||||}} \right) \text{ att}$$

$$\boxed{\text{DÅ}} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

DA

$$\left[\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \right]$$

Graf:



$$\begin{array}{ccc} f(x) & \leq & g(x) \leq h(x) \\ \downarrow x \rightarrow a & & \downarrow x \rightarrow a \\ L & & L \end{array}$$

$g(x)$ måste också gå mot L
därför att $g(x)$ är instängd mellan
 $f(x)$ och $h(x)$ som också går mot L ,
när $x \rightarrow a$.

Exempel

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 3 - x^2 \leq u(x) \leq g(x) = 3 + x^2 \quad \forall x \in (-T, 0) \cup (0, T) \\ \text{Vad kan man säga om } \lim_{x \rightarrow 0} u(x)? \end{array} \right.$$

Svara

Enligt Instängningssatsen

$$f(x) = 3 - x^2 \leq u(x) \leq g(x) = 3 + x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3 - x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3 + x^2 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} 3 - x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 3 + x^2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{Då } \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0 \left(\begin{array}{l} \text{måste vara} \\ \text{också } 0 \end{array} \right)$$

därför att $u(x)$
är instängd mellan
 f och g .

—, — Tack för idag!