

Att komma ihåg från sista föreläsning:

Def 1) $f: D_f \rightarrow V_f$ är kontinuerlig i punkten $a \in D_f$
om $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (*)

2) $f: D_f \rightarrow V_f$ är kontinuerlig på $I \subseteq D_f$ ($I \equiv$ intervall)
om f är kontinuerlig i alla punkter av $I \subseteq D_f$

Ex $f(x) = p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
 $a_n \neq 0, \partial p = n \quad a_i \in \mathbb{R}, i = n, n-1, \dots, 0.$
 f är kontinuerlig i alla $x \in \mathbb{R} = D_f$

D_f
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = p(x)$
polynomial

Satsen 6

f, g kontinuerlig på $I \subseteq D_f, I \subseteq D_g$
 $c \in I, \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c), \lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c)$
OM (Hypothes)

slutsatsen

$f(x) + g(x)$
 $f(x) - g(x)$
 $f(x) * g(x)$
 $k \cdot f(x), k \in \mathbb{R}$
 $\frac{f(x)}{g(x)}, \text{ om } g(c) \neq 0$
 $f(x)^{1/n}, \text{ om } f(c) > 0, n = \text{jämt}$
är kontinuerlig i punkten c

$I = [-1, 1]$

Ex $f(x) = \cos x$
 $g(x) = x^4 + 2x^2$

$h_1(x) = f(x) + g(x) = \cos x + x^2 + 2x^2$
 $h_2(x) = g(x) - \frac{1}{2}f(x) = x^2 + 2x^2 - \frac{1}{2}\cos x$
är kontinuerlig på $I = [-1, 1]$

Satsen 7

A) $f(g(x))$ definierad på $I = (a, b)$
 $c \in I$
 f kontinuerlig i punkten $L \in D_f$
 $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow c} g(x)) = f(L)$

B) $f(g(x))$ väl definierad på $I = (a, b)$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow c} g(x)) = f(g(c))$

①

$$\left[\begin{array}{l} f(g(x)) \text{ väl definierad på } I = (a, b) \\ c \in I \\ g \text{ kontinuerlig i punkten } c \\ f \text{ kontinuerlig i punkten } L = g(c) \end{array} \right] \Rightarrow \left[\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right) = f(g(c)) \right]$$

Kontinuerlig Utvidgning

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$$

Exempel $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$, $x \neq 1, x \neq -1$ (därför $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$
 $x = 1, x = -1$.)
 $f(x)$ är inte definierad i $x = 1$, inte i $x = -1$ heller.

Men f har en kontinuerlig utvidgning i punkten $x = 1$.

Det finns en andra funktion $F(x)$ så att

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \forall x \neq 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x), & x = 1. \end{cases} \quad (\text{för varje } x \neq 1)$$

Då:

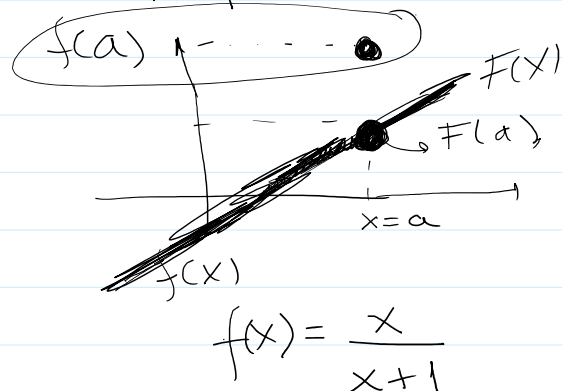
$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$D_F = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$$

Så $F(x) = \begin{cases} f(x), & \forall x \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$

$$D_F = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$



Föreläsning 21: Mål:

- 1) Max/Min satsen
- 2) Mellanligande värden Satsen

Satsen 8 (Sidan 83) (The Max-Min Theorem)

$$x+1=0 \mid x=-1$$

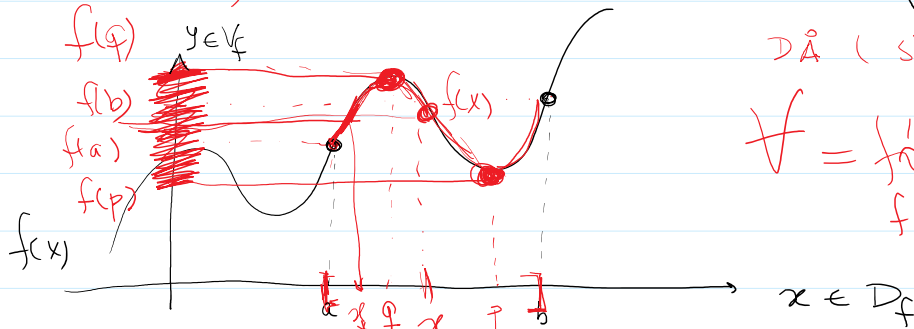
Varje kontinuerlig funktion på ett SLUTET BEGRÄNSAT INTERVALL antar sitt största och sitt minsta värde på intervallet.
 ...ar det finns

antär sitt största och sitt minsta värde på intervallet.

Existerar (Det finns)

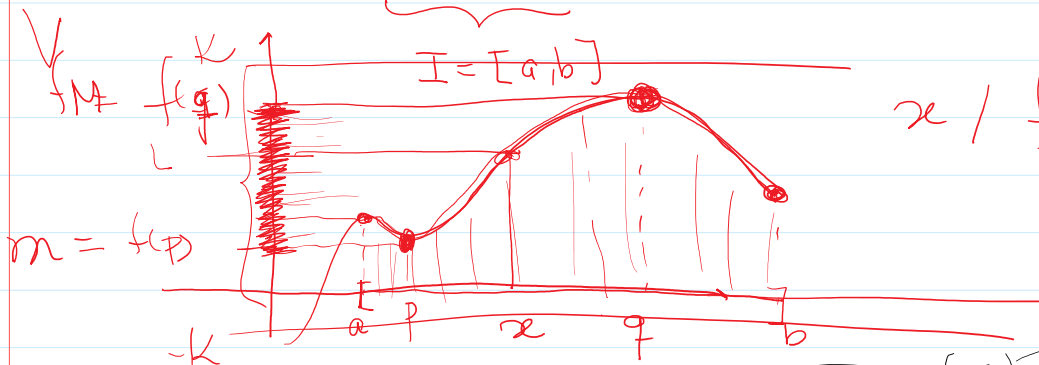
$$\left[\begin{array}{l} f: D_f \rightarrow V_f \quad I=[a,b] \subseteq D_f \\ f \text{ kontinuerlig på } I \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \exists p, q \in I=[a,b] \subseteq D_f \text{ så att} \\ \forall x \in I, \underbrace{f(p)}_{\text{minsta värde}} \leq \underbrace{f(x)}_{\text{minsta värde}} \leq \underbrace{f(q)}_{\text{största värde}} \end{array} \right]$$

OM (Hypotes)



DÅ (slutsatsen)

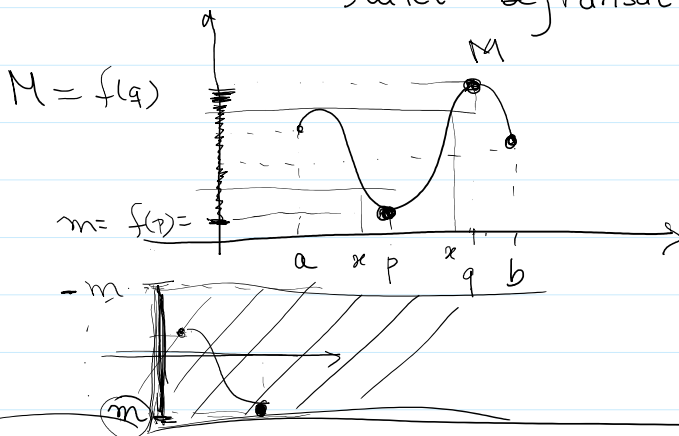
$\forall$ = för varje ...
för alla ...



$$x / f(x) = L \quad L \in [f(p), f(q)]$$

$$\underbrace{-k}_{\text{minsta}} \leq \underbrace{m}_{\text{minsta}} \leq f(x) \leq \underbrace{M}_{\text{största}} \leq \underbrace{k}_{\text{största}} \quad k = \max(|m|, |M|)$$

Konsekvens: Varje kontinuerlig funktion på ett slutet begränsat intervall är AVGRÄNSAD (Bounded)



$$-k \leq f(p) \leq f(x) \leq f(q) \leq k$$

$$\exists k \in \mathbb{R} / \forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq k$$

$$k = \max(|m|, |M|)$$

$$-k \leq f(x) \leq k$$

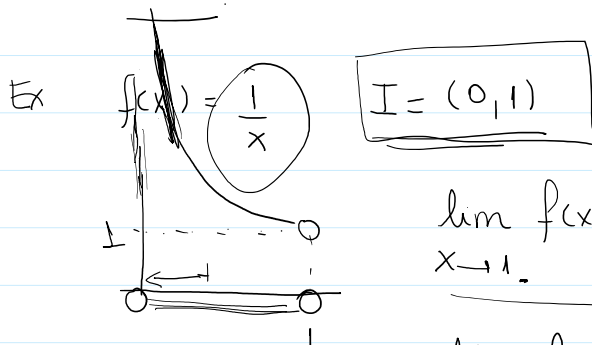
Satsen

$$\left[\begin{array}{l} f: D_f \rightarrow V_f \quad I=[a,b] \subseteq D_f \\ f \text{ kontinuerlig på } I \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \exists p, q \in I / \underbrace{f(p)}_m \leq f(x) \leq \underbrace{f(q)}_M \end{array} \right]$$

Sats 8.1: f kontinuerlig på I $\Rightarrow \exists p, q \in I \mid \underbrace{f(p)}_m \leq f(x) \leq \underbrace{f(q)}_M$

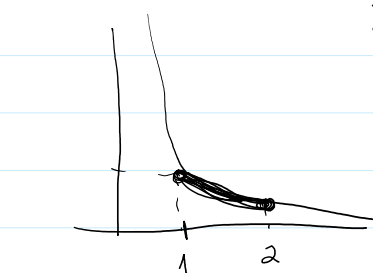
Obs Hypotes är jätteviktig:

Titta!



$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ men ~~$f(1)$~~ därför $1 \notin I$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

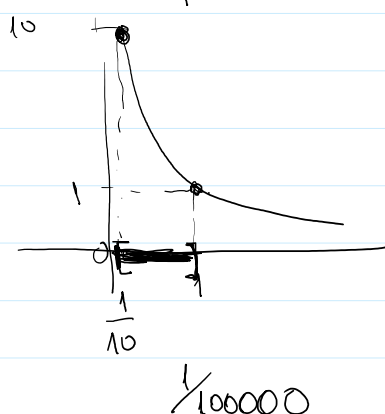


$f(x) = \frac{1}{x} \quad I = [1, 2]$

$M = f(1) = 1$

$m = f(2) = \frac{1}{2}$

$[0, 1]$ slutet
 $0 \leq x \leq 1$

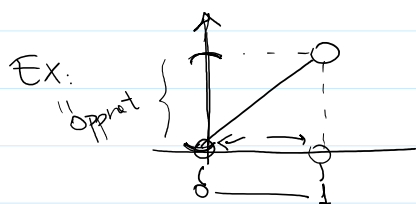


$I = [\frac{1}{10}, 1]$

$m = f(1) = 1$

$M = f(\frac{1}{10}) = 10$

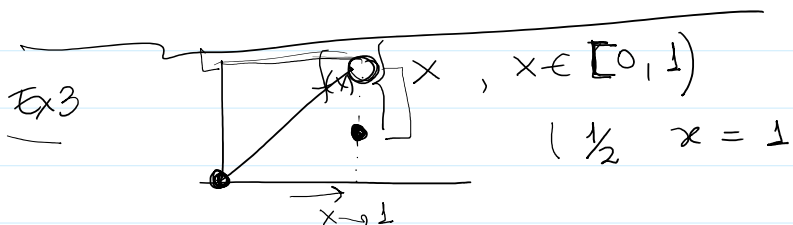
$(0, 1)$ öppet
 $0 < x < 1$



$f(x) = x \quad I = (0, 1)$

$m, M ???$

$f \in [0, 1]$

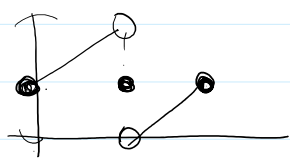


$(\frac{1}{2}, x = 1)$

$M \neq L$

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ inte kontinuerlig på I

$m \neq l$



Sidan ≈ 83 85

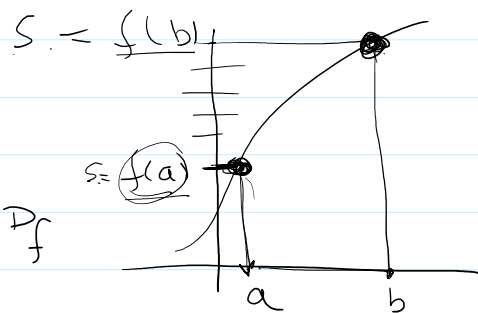
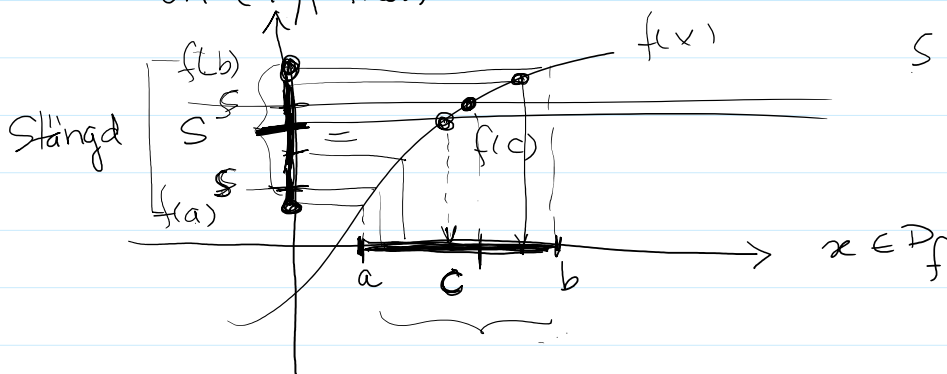
Theorem 9 (The intermediate-value Theorem)

Satsen om Mellanliggande värden

$$\left[\begin{array}{l} f \text{ kontinuerlig på } I = [a, b] \\ f(a) < \textcircled{S} < f(b) \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \exists c \in [a, b] = I \text{ så att} \\ f(c) = S \end{array} \right]$$

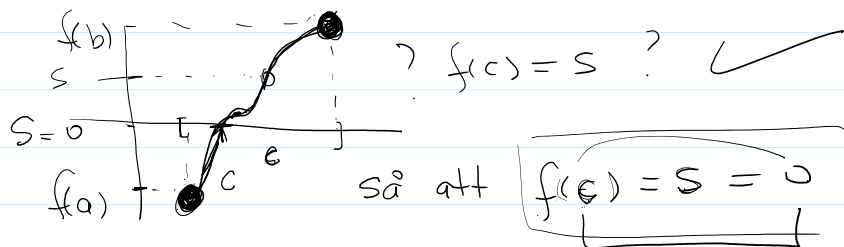
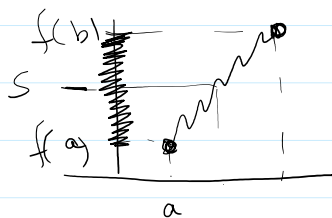
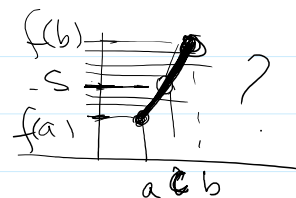
OM (Hypothes)

Då (slutsatsen)



Tillämpning av den mellanliggande värden satsen

↳ Bisection Method



$$\left[\begin{array}{l} f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ f \text{ kontinuerlig på } I \\ \textcircled{*} f(a) \cdot f(b) < 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \exists c \in [a, b] = I \text{ så att} \\ f(c) = 0 \end{array} \right]$$

$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow f(a) > 0 \text{ och } f(b) < 0$

eller

$f(a) < 0 \text{ och } f(b) > 0$

