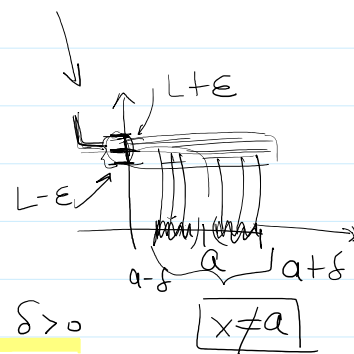


Mål:
 Formell Definition av Gränsvärde
 Räkeregler för Gränsvärde

Sidan 89 - Def (Epsilon-Delta definition) Formell Def.

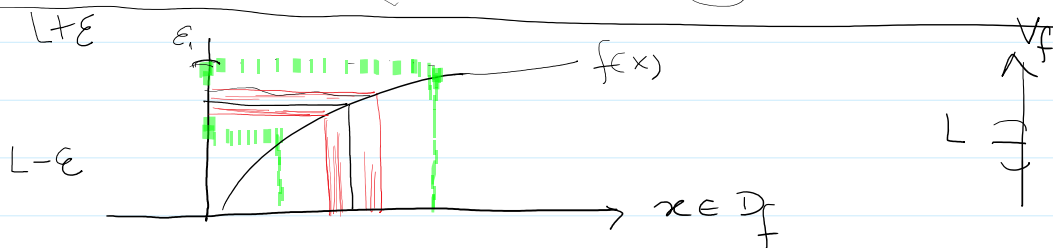


vi säger att funktionen $f(x)$ har gränsvärde L ,
 då x går mot a om följande gäller:

Till varje $\epsilon > 0$ (oavsett hur litet ϵ är), finns det ett tal $\delta > 0$
 ($\delta = \delta(\epsilon)$) sådant att:

- (1) $f(x)$ är definierad för $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ $x \neq a$
- (2) $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$

$$\left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 / \\ x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \subseteq D_f \text{ \& } \\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon \end{array} \right]$$

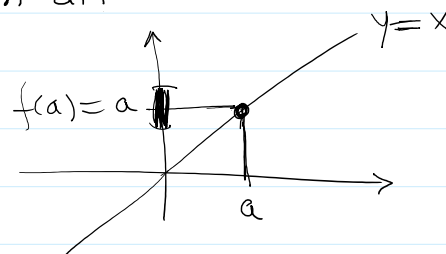


Obs. 1) δ är beroende av ϵ $\delta = \delta(\epsilon)$ $\delta > 0$

2) $0 < |x-a| < \delta$ betyder $\begin{cases} x \neq a \\ \text{och} \\ |x-a| < \delta \end{cases}$

Exempel: Visa med hjälp av formell definition att

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$



Lösning:

Låt $\epsilon > 0$ vara ett reellt tal.

Vi undersöker uttrycket $|f(x) - L| < \epsilon$

Då måste vi hitta $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sådant att

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta &\Rightarrow \\ -\delta < x-a < \delta &\Rightarrow \\ a-\delta < x < a+\delta & \end{aligned}$$

$$|f(x) - L| = |x - a| < \epsilon$$



$$a - \delta < x < a + \delta$$

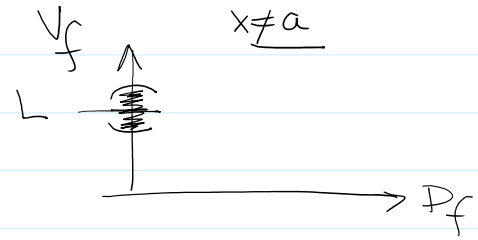
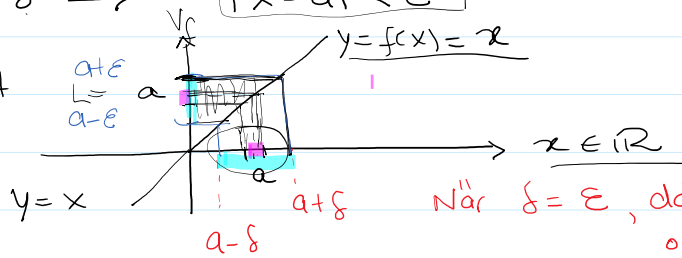
$$|f(x) - L| = |x - a| < \varepsilon$$

Men, om $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$, då gäller att

$$0 < |x - a| < \delta = \varepsilon \Rightarrow$$

$$|x - a| < \varepsilon$$

Därför att



$$\text{När } \delta = \varepsilon \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |x - a| < \varepsilon$$

$$f(x) = x \quad L = a$$

Ex. 2 Visa med hjälp av definitionen att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 + 2x \sin\left(\frac{3}{x^2}\right) \right) = 2$$

$$f(x) = 2 + 2x \sin\left(\frac{3}{x^2}\right) \quad x \neq 0$$

Lösning:

Låt $\varepsilon > 0$ vara ett reellt tal.

Vi undersöker uttrycket

$$|f(x) - 2| < \varepsilon$$

$$|f(x) - 2| = \left| 2 + 2x \sin\left(\frac{3}{x^2}\right) - 2 \right| = \left| 2x \sin\left(\frac{3}{x^2}\right) \right| \quad x \neq 0$$

$$\left| 2x \sin\left(\frac{3}{x^2}\right) \right| = |2x| \cdot \left| \sin\left(\frac{3}{x^2}\right) \right| \leq |2x| \cdot 1$$

$$-1 \leq \sin(t) \leq 1 \quad |\sin(t)| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$$

När

$$|2x| < \varepsilon$$

?? Kan man hitta $\delta = \delta(\varepsilon)$ sådant att

$$|x - 0| < \delta \quad \text{då} \quad |2x| < \varepsilon$$

Ja! när vi väljer

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

då har vi resultat som vi behöver:

$$|x - 0| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |2x| < 2\delta = \varepsilon$$

men

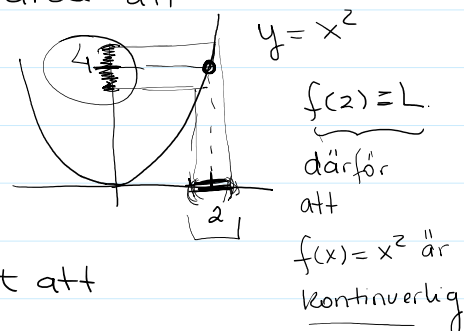
$$|f(x) - 2| < |2x| \cdot 1 < \varepsilon$$

$$\text{Då } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

Då $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

Ex 3 Använda formell definition av gränsvärde att visa

$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ $|x-2| < \delta$



Lösning:

Låt $\varepsilon > 0$ vara ett reellt tal.

En gång till, behöver vi hitta $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sådant att

$|x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$

$L = 4 = (2)^2$

Vi undersöker

$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)|$

$|x-2| < 1$

Vad händer om vi väljer $\delta \leq 1$?

$|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow -1+2 < x < 2+1 \therefore 1 < x < 3$

När $1 < x < 3$, då $1+2 < x+2 < 3+2 \therefore (x+2) < 5$
 $\& (x+2) = (x+2) < 5$

Så, för $\delta \leq 1$

$|x^2 - 4| < 5|x-2|$ om $|x-2| < \delta \leq 1$

Men

$5|x-2| < \varepsilon$ om $|x-2| < \varepsilon/5$

Då när $\delta = \min \{1, \varepsilon/5\}$ & $|x-2| < \delta$

Kan man säkert ha att

$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| < 5|x-2| < 5 \cdot (\varepsilon/5) = \varepsilon$

Då $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ $\square$

Sedan 90 Använda formell definition av gränsvärde att bevisa satser och reglerna:

Ex4. OM $\lim f(x) = L$ & $\lim g(x) = M$ Hypotes

Ex4. OM $\left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ \& } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \right]$ Hypotes

DÅ $\left[\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \underline{\underline{L+M}} \right]$ slutsats

Lösning:

Låt $\varepsilon > 0$ vara ett reellt tal. $\varepsilon/2$ också $\in \mathbb{R}$.

Hur $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, det finns $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ sådant att
 $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2$

och
 hur $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, det finns $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ sådant att
 $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/2$

Vi vill hitta δ_* som passar för både f och g
 när x ligger nära a . Mål

$|x - a| < \delta_* \Rightarrow |(f+g)(x) - (L+M)| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (L+M)| &= \\ |f(x) - L + g(x) - M| &\leq \underbrace{|f(x) - L|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|g(x) - M|}_{< \varepsilon/2} \end{aligned}$$

när $|x - a| < \delta_1 \wedge |x - a| < \delta_2$

Så, om man väljer $\delta_* = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$

man kan få resultatet samtidigt för f och g
 och dock för $(f+g)(x)$. $\square$

* Sammanfatta:

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta_x &\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2 \\ |x - a| < \delta_x &\Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/2 \end{aligned} \Rightarrow$$

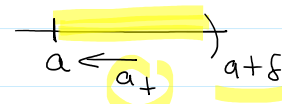
$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$|(f+g)(x) - (L+M)| < \varepsilon \quad \square$$

$$|(f+g)(x) - (L+M)| < \varepsilon$$

Sidan 90/91 Olika typer av Gränsvärde:

Def 9 (Höger Gränsvärde) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

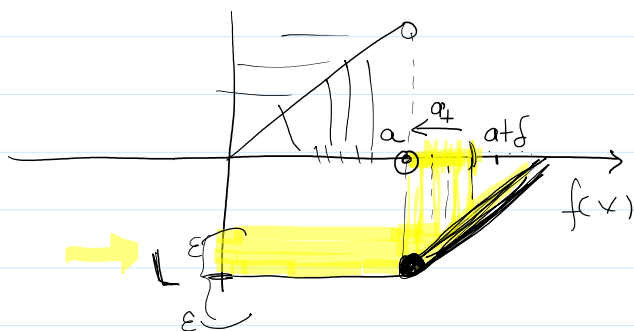


Vi säger att funktionen $f(x)$ har Höger gränsvärdet L då x går mot talet a med värde större än a .

Till varje $\varepsilon > 0$, finns det ett tal $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sådant att $a < x < a + \delta \wedge x \in D_f \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

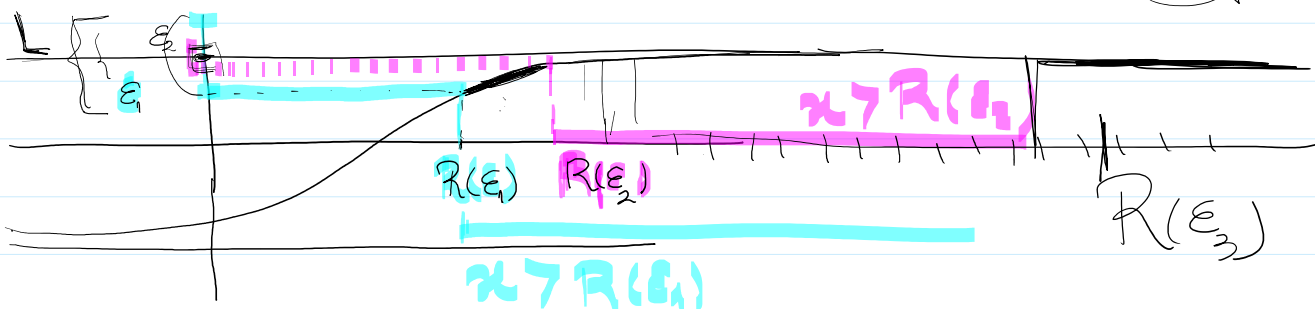
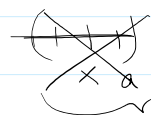
$$0 < |x - a| < \delta$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 / a < x < a + \delta \wedge x \in D_f \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$



Def 10 (Gränsvärde vid Oändlighet) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$

$\forall \varepsilon > 0, \exists R = R(\varepsilon) > 0$ om $x > R(\varepsilon) \wedge x \in D_f$ då $|f(x) - L| < \varepsilon$



Def 11 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

$$\text{Def 11} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \\ \forall B > 0, \exists \delta_B > 0 \text{ / om } 0 < |x - a| < \delta, \text{ då } f(x) > B. \end{array} \right.$$

Exempel: Visa med hjälp av definitionen att:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

Lösning:

Låt $\varepsilon > 0$ reellt tal

Vi måste hitta $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sådant att

$$0 < x < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

Vi undersöker

$$|f(x) - L| \quad \therefore |\sqrt{x} - 0| = |\sqrt{x}|$$

$$\text{Om } 0 < x < \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{0} < \sqrt{x} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

Så till varje $\varepsilon > 0$, existerar $\delta = \varepsilon^2$ sådant att

$$0 < x < \delta = \varepsilon^2 \Rightarrow 0 < \sqrt{x} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$