

1) Bestäm konstanten a så att $f(x) = \frac{x^2 + ax - 7}{x+4}$

har en sned asymptot $y = x+6$.

Lösning:

För att $f(x)$ skall ha en sned asymptot $y = x+6$,
så måste $f(x) - (x+6) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow +\infty$.

$$(x+4)(x+6) = x^2 + 10x + 24$$

$$f(x) - (x+6) = \frac{x^2 + ax - 7}{x+4} - (x+6) =$$

$$= \frac{x^2 + ax - 7 - (x^2 + 10x + 24)}{(x+4)} = \frac{(a-10)x - 31}{(x+4)}$$

V: ser att $f(x) - (x+6) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$

om

$$a = 10$$

□

2) Kan man bestämma konstanten C så att funktionen
 $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln\left(\frac{6}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ C, & x = 0 \end{cases}$ blir kontinuerlig?
Yes OR No?

Lösning:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln\left(\frac{6}{x}\right) = 0 \cdot \ln\left(\frac{6}{0}\right) ???$$

Men $\sin\left(\frac{\cdot}{m}\right)$ är begränsat. $\therefore \left| \ln \frac{6}{x} \right| < 1, \forall x \in D_f, x \neq 0$.

Och vi har att

$$-x^2 < x^2 \ln\left(\frac{6}{x}\right) \leq x^2 \quad x \neq 0$$

↪ en annan att

$$-x^2 < x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2 \quad x \neq 0.$$

Eftersom $-x^2$ & $x^2 \rightarrow 0$, då $x \rightarrow 0$ så är

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad (\text{Enligt the Squeeze Theorem})$$

Alltså Om $C=0$, då är funktionen kontinuerlig.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \quad \text{om det existerar.}$$

För $C=0$

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \rightarrow 0 \quad \text{då } h \rightarrow 0$$

Funktionen är deriverbar åt $x=0$:

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x^2)}{7x^2}$

Lösning:

$$y = 7x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{\frac{7x^2}{7}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{\frac{3}{7}y} = \frac{7}{3}$$

då $y \rightarrow 0_+$ och $x \rightarrow 0$

Obs: $\frac{\sin y}{y} \rightarrow 1$ (standard gränsvärde)
 $y \rightarrow 0$

4) Bestäm det största intervallet (a,b) där funktionen

$$f(x) = e^{x-2} (x^2 - 12x + 37) \quad \text{är konkar.}$$

Lösning.

En 2 gånger deriverbar funktion är konkar om $f''(x) < 0$

$$f'(x) = e^{x-2} \cdot (1) (x^2 - 12x + 37) + e^{x-2} (2x - 12)$$

$$f'(x) = e^{x-2} (x^2 - 10x + 25)$$

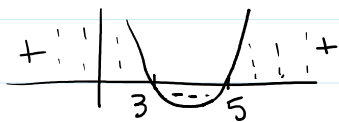
$$f''(x) = e^{x-2} (x^2 - 10x + 25) + e^{x-2} (2x - 10)$$

$$f''(x) = e^{x-2} (x^2 - 8x + 15)$$

$$f''(x) < 0 \iff p_2(x) = x^2 - 8x + 15 < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2} \quad \begin{cases} \frac{8 + \sqrt{4}}{2} = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{8 - \sqrt{4}}{2} = \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

$$p_2(x) = (x-3)(x-5)$$



Så $p_2(x) < 0$ på
intervallet $(3, 5)$

$$\boxed{3 < x < 5}$$

Så $f(x)$ är konkar (up)
på intervallet $(3, 5)$

—, —

5) Bestäm alla asymptoter till $f(x) = \frac{x^2 \arctan(x)}{4x - 4}$

1) Vertical asymptote:

Derivata i den närmaste...

1) Vertical asymptote:

$Q(x) = 4x - 4$ denominator:

$$Q(x) = 4x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1} \text{ vertical asymptote.}$$

$$1.a) \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \left(\frac{x^2}{1+ - 1} \right) \cdot \frac{\arctan(x)}{4} \quad \begin{matrix} \arctan(1) \\ k = \text{constant.} \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \left(\frac{1}{0+} \right) (\arctan(x)) = +\infty \cdot \arctan(1) = +\infty$$

$$1.b) \lim_{x \rightarrow 1-} \left(\frac{x^2}{1- - 1} \right) \cdot \frac{\arctan(x)}{4} \stackrel{\arctan(1) = k}{=} \frac{1}{0-} \cdot k = -\infty.$$

$$5.2) f(x) = \frac{x^2 \arctan x}{4x - 4} = \frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{x-1} \right) \arctan x \quad \begin{matrix} \text{Viska arbeta} \\ \text{med den d\AA r} \\ \text{funktion.} \end{matrix}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \pi/2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\pi/2.$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot x}{x(1 - 1/x)} = +\infty \quad \begin{matrix} \text{linear} \\ \text{behaviour} \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot x}{x(1 - 1/x)} = -\infty \quad \begin{matrix} \text{linear} \\ \text{behaviour.} \end{matrix}$$

iii) $y = kx + a$ är en asymptot till $f(x)$ om

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + a)) = 0.$$

och

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = a$$

Så

$$4f(x) = \left(\frac{x^2}{x-1} \right) \arctan x = \left(\frac{x^2}{x-1} - x + x \right) \arctan x =$$

$$= \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) \arctan x + x \arctan x$$

$$= \underbrace{\left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) \arctan x}_{F_1(x)} + \underbrace{x \arctan x}_{F_2(x)} \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 f(x) = F_1(x) + F_2(x) \\ f(x) = \frac{1}{4} F_1(x) + \frac{1}{4} F_2(x) \end{array} \right.$$

$F_2(x)$ är en jämt funktion, därför att $\left(\begin{array}{l} \text{jämt funktion: } g(x) = g(-x) \\ \text{udda funktion: } g(x) = -g(-x) \end{array} \right.$
 $\left\{ \begin{array}{l} x \text{ är en udda funktion och} \\ \arctan x \text{ är en udda funktion} \end{array} \right.$

Hitta asymptoter till $F_2(x)$ då $x \rightarrow +\infty$

5.2 a) Hitta riktningskoefficienten

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \boxed{+\frac{\pi}{2}} \checkmark$$

5.2 b) Hitta konstanten.

$$k = \frac{\pi}{2}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} (F_2(x) - k \cdot x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) \right) \stackrel{(*)}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\left(\frac{1}{x} \right)} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad (*)$$

an simple strategy to try is L'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{d}{dx} \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) \right)}{\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 0}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} - \frac{1}{(1+x^2)} \cdot \frac{x^2}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} - \frac{\cancel{x^2} (1)}{\cancel{x^2} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} =$$

$$\lim \underline{-1} = -1$$

$$x \rightarrow \infty \quad \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \rightarrow 0$$

Så, asymptoten är $y = \frac{\pi}{2}x - 1$, då $x \rightarrow +\infty$

men man har $\frac{1}{4}$ och man behöver multiplicera.
allt på $\frac{1}{4}$

$$\text{Då svaren är } y = \frac{\pi}{8}x - \frac{1}{4}$$

när $x \rightarrow +\infty$.

Det är analogous tänka
när $x \rightarrow -\infty$

6) Finns det något eller några intervall där funktion
 $f(x) = \frac{x^2}{x-7}$ är växande?

Lösning:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' \cdot \frac{1}{(x-7)} + (x^2)(-1)(x-7)^{-2} \cdot (1) = \\ &= \frac{2x}{(x-7)} - \frac{x^2}{(x-7)^2} = \frac{2x(x-7) - x^2}{(x-7)^2} = \\ &= \frac{2x^2 - 14x - x^2}{(x-7)^2} = \frac{x^2 - 14x}{(x-7)^2} = \frac{x(x-14)}{(x-7)^2} \end{aligned}$$

	0				7				14							
$x(x-14)$	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$(x-7)^2$	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+
<u>$x(x-14)$</u>	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+

$$\frac{(x)(x-14)}{(x-7)^2} \quad \left\{ \underbrace{+++++}_\text{växande} \quad 0 \quad \text{---} \quad \cancel{7} \quad \text{---} \quad 0 \quad \underbrace{+++++}_\text{växande} \right.$$

f är växande när $f'(x) > 0$

$f' > 0$ på intervallet $(-\infty, 0) \cup (14, +\infty)$

Obs: 1) I understood that it was complicated to inform intervals in Möbius-Canvas

2) Question about asymptoter involved L'Hopital to be solved. And this we did not agree in including on the test.

I will consider all possible answers her.

But, please, try to do this question completely now, analysing both $x \rightarrow +\infty$ and $x \rightarrow -\infty$.

It is an important topic of the discipline.

3) Each time you have tried to solve one question, the system provided a different (but similar) question.

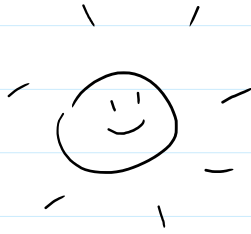
For this reason it is not possible to generate a complete facit for you.

But I hope this solved exercises can help you to prepare better for Tentan.

for Tentan.

4) Thank you!

And good luck.



Shice