

# LÖSNINGAR TILL TENTAMEN FÖR MVE460

Tisdag den 27:e oktober 2020, 8<sup>30</sup> – 12<sup>30</sup>

1. Bevisa att: Om  $f'(x) = g'(x)$  för varje  $x$  i ett intervall  $I = (a, b)$ , då är  $f(x) = g(x) + c$  på  $x \in I$  för någon konstant  $c \in \mathbb{R}$ .

Se kurslitteraturen (Adams s. 142, Satsen 13, Avsnitt 2.8). Använda satsen för  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

2. Om vi räknar direkt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1 + \tan x}{x \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} = ??$$

Enligt L'Hopitalssatsen (Adams s. 231).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx} (e^{-x} - 1 + \tan x) = -e^{-x} + \sec^2 x \\ \frac{d}{dx} g(x) &= \frac{d}{dx} (x \sin 3x) = \sin 3x + 3x \cos 3x \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-1 + 1}{0 + 3 \cdot 0} = \frac{0}{0} = ??$$

Så deriverar vi igen:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{d}{dx} (-e^{-x} + \sec^2 x) = e^{-x} + 2 \sec^2 x \tan x \\ g''(x) &= \frac{d^2}{dx^2} g(x) = \frac{d}{dx} (\sin 3x + 3x \cos 3x) = 6 \cos 3x - 9x \sin 3x \end{aligned}$$

Och nu har vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1 + 0}{6 \cdot 1 - 9 \cdot 0 \cdot 0} = \frac{1}{6}$$

3. Skissa grafen till funktionen  $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{x - 2}$ .

Lösning: Definitionsmängden  $D_f$ :

$$x - 2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2 \rightarrow D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty).$$

Funktion  $f$  är ett kvot mellan två differentierbara funktioner på domänen  $D_f$ , så är funktionen  $f$  i sig differentierbar på samma domän. Eftersom differentiering betyder i kontinuitet är  $f$  också kontinuerlig i samma domän  $D_f$ .

Nu analyserar vi funktionens gränsvärden när  $x$  går mot 2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{1}{(x-2)} e^{x/2} &= \frac{1}{0_+} e^1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{1}{(x-2)} e^{x/2} &= \frac{1}{0_-} e^1 = -\infty\end{aligned}$$

Då är  $x = 2$  en vertikal asymptot. Nu analyserar vi funktionens gränsvärden när  $x$  går mot  $\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-2)} e^{x/2} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-2)} e^{x/2} &= 0_-\end{aligned}$$

Så  $y = 0$  är också en asymptot och  $f(x)$  är negativa värden mot noll, när  $x$  går mot negativ oändlighet.

$$f(0) = -\frac{1}{2}e^0 = -\frac{1}{2}, \text{ så } (-\infty, 0) \subset V_f = \text{funktions värdemängd.}$$

Vi analyserar funktionsderivat för att hitta lokala min- eller maxvärden.

$$\begin{aligned}f'(x) &= -(x-2)^{-2}e^{x/2} + \frac{1}{2(x-2)}e^{x/2}, \quad f'(x) = \left[\frac{-2 + (x-2)}{2(x-2)^2}\right]e^{x/2} \\ f'(x) &= \left[\frac{x-4}{2(x-2)^2}\right]e^{x/2} = 0 \rightarrow x-4 = 0 \rightarrow x = 4, \text{ kritiska punkten.}\end{aligned}$$

$$f'(x) = \left[\frac{x-4}{2(x-2)^2}\right]e^{x/2} > 0 \rightarrow x-4 > 0 \rightarrow x > 4, f \text{ är växande}$$

$$f'(x) = \left[\frac{x-4}{2(x-2)^2}\right]e^{x/2} < 0 \rightarrow x-4 < 0 \rightarrow x < 4, f \text{ är avtagande.}$$

Att analysera om funktion är konkav eller konvex, behöver vi titta på andra derivata av funktion  $f$ .

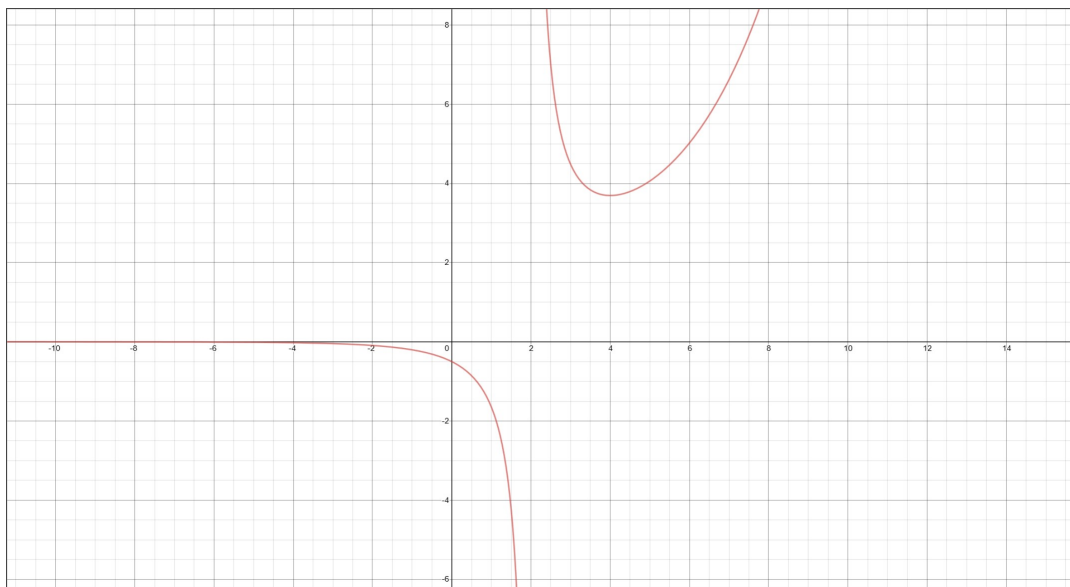
$$f''(x) = \left[\frac{x^2 - 8x + 20}{4(x-2)^3}\right]e^{x/2} > 0, \leftrightarrow x^2 - 8x + 20 > 0 \text{ och } (x-2)^3 > 0 \rightarrow x > 2,$$

Så är  $f$  konvex = concav up för  $x \in (2, +\infty)$

$$f''(x) = \left[\frac{x^2 - 8x + 20}{4(x-2)^3}\right]e^{x/2} < 0, \leftrightarrow x^2 - 8x + 20 > 0 \text{ och } (x-2)^3 < 0 \rightarrow x < 2,$$

Så är  $f$  konkav = concav down för  $x \in (-\infty, 2)$ .

Eftersom  $f''(4) > 0$  är den kritiska punkten en punkt av minimalt värde och det lokala minimum är  $f(4) = \frac{1}{2}e^2 \approx 3,695$ . Och nu kan vi bestämma funktions värdemängd:  $V_f = (-\infty, 0) \cup [f(4), +\infty)$ . Och funktions graf är given i figur:



4.  $f(x) = \cos x$ .  $P_2(x)$  är Taylors polynomial av grad 2 utvecklades runt  $a$ .  $E_3(x)$  är felet när den oändliga Taylors serien trunckeras som  $P_2(x)$

$$P_2(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$E_3(x) = \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3, \quad c \text{ mellan } x \text{ och } a.$$

Nu räknar vi allt:

$$x = 40^\circ = \frac{\pi}{4.5}, \quad a = 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \quad (x-a) = (-5^\circ) = -\frac{\pi}{36}$$

$$f(a) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f'(a) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f''(a) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f'''(t) = \sin(t), \text{ så}$$

$$\begin{aligned}
P_2\left(\frac{\pi}{4.5}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1!}\left(-\frac{\pi}{36}\right) + \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}\left(-\frac{\pi}{36}\right)^2 \\
P_2\left(\frac{\pi}{4.5}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\pi}{36}\right) + -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\pi}{36}\right)^2 \\
P_2\left(\frac{\pi}{4.5}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{36} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2\right) = 0.766121025621
\end{aligned}$$

Eftersom det finns  $k > 0$  så att  $|f'''(t)| = |\sin(t)| < k$  för  $t$  mellan  $x$  och  $a$ ,  $|f'''(t)| < \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , kan vi uppskatta error  $E_3(t)$  som görs i approximationen av  $f(t)$  av Taylorpolynomet  $P_2(t)$ .

$$|E_3(t)| < \frac{k}{3!}(x-a)^3 = \frac{1}{6} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{36}\right)^3 = 0.00007832057506 = \alpha$$

Så

$$|f(x) - P_2(x)| < \alpha \rightarrow P_2(x) - \alpha < f(x) < P_2(x) + \alpha$$

Och en möjligt interval är  $0.766042705046 < f(x) < 0.766199346196$ .

Enligt Corollary A, sida 273:

$f(x) = P_1(x) + E_2(x)$ , och när  $E_2(x) = c * f'' < 0, c = (x-a)^2/2 > 0$ , då har vi  $f(x) - P_1(x) = E_2(x) < 0 \rightarrow f(x) < P_1(x)$ .

Nu har vi

$f(x) = P_2(x) + E_3(x)$ ,  $E_3(x) = c * f''' < 0$ , eftersom  $c = (x-a)^3 < 0$ , och  $f'''(x)/3! > 0 \rightarrow f(x) - P_2(x) = E_3(x) < 0 \rightarrow f(x) < P_2(x)$ .

Då kan vi minska intervallet var  $f(x)$  finns:

$P_2(x) - 0.00007832057506 < f(x) < P_2(x)$ .  
 $0.766042705046 < f(x) < 0.766121025621$ .

5. Räkna  $\frac{dy}{dt}$ , om  $y(t) = \cos(t)^{\ln(t)}, 0 < t < \pi/2$

För att lösa denna uppgift måste vi använda logaritmisk derivering: Så börjar vi med att skriva på generellt sätt:

$y(t) = f(t)^{g(t)}, f(t) > 0, \forall t \in D_f, D_f = \text{definitionsområdet av } f$

Sedan tillämpar vi logaritm på båda sidor:

$\ln(y(t)) = \ln(f(t)^{g(t)}) = g(t)\ln(f(t))$

Nu deriverar vi båda sidor med hjälp av kedjeregeln och produktregeln :

$$\begin{aligned}\frac{1}{y(t)} \frac{d}{dt}(y(t)) &= \left(\frac{d}{dt}g(t)\right) \ln(f(t)) + g(t) \frac{d}{dt} \ln(f(t)) \\ \frac{1}{y(t)} \frac{d}{dt}(y(t)) &= g'(t) \ln(f(t)) + g(t) \frac{1}{f(t)} f'(t)\end{aligned}$$

Vad vi vill erhållas genom isolering  $\frac{d}{dt}(y(t))$ :

$$\frac{d}{dt}y(t) = (y(t)) \left[ g'(t) \ln(f(t)) + g(t) \frac{1}{f(t)} f'(t) \right]$$

Med den här formel kan vi räkna derivata av ursprunglig funktion:

$y(t) = \cos(t)^{\ln(t)}$ : Så  $f(t) = \cos(t)$ ,  $g(t) = \ln(t)$ : Och svara är:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}y(t) &= (\cos(t)^{\ln(t)}) \left[ \frac{1}{t} \ln(\cos(t)) + \ln(t) \frac{1}{\cos(t)} (-\sin(t)) \right] \\ \frac{d}{dt}y(t) &= (\cos(t)^{\ln(t)}) \left[ \frac{1}{t} \ln(\cos(t)) - \ln(t) \tan t \right], \quad 0 < t < \pi/2\end{aligned}$$

6a. Bestäm ekvationen för planet  $\Pi$  som innehåller punkten  $P=(1, 2, 3)$  och som är vinkelrät mot linjen  $L$  med riktningsvektor  $\vec{v} = (2, 1, -1)$ .

Lösningen är enkelt eftersom punkten och den normala vektorn båda ges direkt i frågan.

En generisk punkt  $X = (x, y, z)$  från planet  $\Pi$  bildar tillsammans med den kända punkten  $P=(1, 2, 3)$  en vektor  $\vec{PX}$  som tillhör till planet  $\Pi$ .  $\vec{PX}$  är vinkelrätt mot den normala vektorn  $\vec{v} = \vec{N} = (2, 1, -1)$ , per definition. Så:

$$\vec{PX} \cdot \vec{N} = (x - 1, y - 2, z - 3) \cdot (2, 1, -1) = 0 \Rightarrow \Pi : 2x + y - z = 1$$

6b. Bestäm avståndet mellan punkt  $A=(1, -2, 5)$  (som är på linjen  $L$ ) och planet  $\Pi$ ,  $d(A, \Pi)$ . Ge den tre ekvations former av Linjen  $L$ . Lösning:

Punkten  $A = (1, -2, 5)$  tillhör till linjen  $L$ , men inte till planet  $\Pi$ , därför att punktens koordinater uppfyller inte planeekvationen,  $2(1)+1(-2)-1(5) = -5 \neq 1$ . Så bildas  $\vec{AP} = (1 - 1, 2 + 2, 3 - 5) = (0, 4, -2)$ .

Då avståndet  $d(A, \Pi) = ||\vec{AP}_{\vec{N}}|| = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{N}|}{|\vec{N}|}$ .

$$\frac{|\vec{AP} \cdot \vec{N}|}{|\vec{N}|} = \frac{|(0, 4, -2) \cdot (2, 1, -1)|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

6c. För att skriva linjens ekvationer börjar vi med: Alla punkter  $X$  som tillhör

L ska bildas en vektor  $\vec{AX}$  som är parallel tillriktningsvektor  $\vec{v} = (2, 1, -1)$ .  
Att vara parallel betyder det att  $\vec{AX} = \lambda \vec{v}$ , med  $\lambda \in \mathbb{R}$ . (i)  $\vec{AX} = \lambda \vec{v} \Rightarrow X = A + \lambda \vec{v}$ :

Vektor parametrik ekvation av L:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Skalar parametrik ekvation av L:  $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + 1\lambda \\ z = 5 - 1\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$  Standard ekvation

av L:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-5}{-1}$$

7. Echelon form av  $[A|B]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \text{ pivot rad} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 13 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \text{ pivot rad} \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow \frac{1}{13}L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_3 \text{ pivot rad} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \text{ pivot rad} \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = [\tilde{A}|\tilde{B}]$$

Då

$$X = \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$