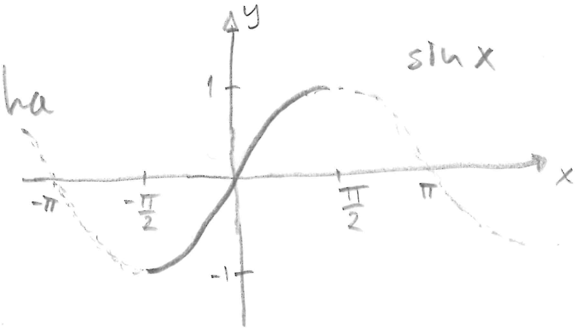
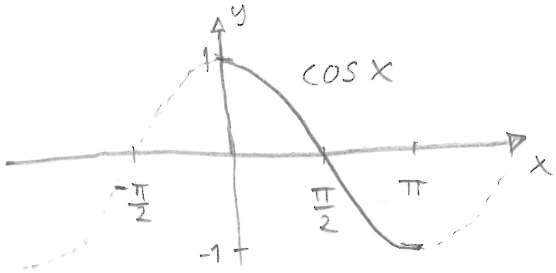
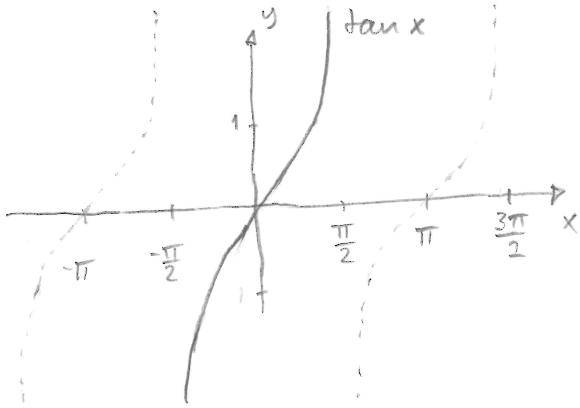
Mårten Wadenbäck

Fler derivator och implicit derivering

Som bekant är de trigonometriska funktionerna periodiska, vilket betyder att de, i strikt mening saknar inverser. När vi talar om inversa trigonometriska funktioner är det därför underförstått att vi begränsar definitionsmängderna (enligt figurerna).







Då gäller

(1) $\arcsin(\sin x) = x$ för alla $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\sin(\arcsin y) = y$ för alla $y \in [-1, 1]$

(2) $\arccos(\cos x) = x$ för alla $x \in [0, \pi]$

$\cos(\arccos y) = y$ för alla $y \in [-1, 1]$

(3) $\arctan(\tan x) = x$ för alla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\tan(\arctan y) = y$ för alla $y \in \mathbb{R}$.

Vi skall nu använda ovanstående för att bestämma de inversa trigonometriska funktionernas derivator.

Sats: (i) $D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(ii) $D[\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(iii) $D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$

Bevis: (i) Låt $y=f(x)=\arcsin x$. Då är inversen till $f(x)$ $x=g(y)=\sin y$, dvs $g(f(x))=x$. Nu måste

$$D[g(f(x))] = D[x] \Leftrightarrow$$

$$g'(f(x))f'(x) = 1 \Leftrightarrow g'(y)f'(x)=1 \Leftrightarrow$$

$$\cos y \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(ii) Lämnas som övning.

(iii) Låt $y=f(x)=\arctan x$. Då ges inversen till $f(x)$ av $x=g(y)=\tan y$, och vi har $g(f(x))=x$. Nu gäller

$$D[g(f(x))] = D[x] \Leftrightarrow$$

$$g'(f(x))f'(x) = 1 \Leftrightarrow g'(y)f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(1+\tan^2 y)f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Exempel: Bestäm derivatan av $f(x)=\arccos(\sqrt{x})$.

Enligt kedjeregeln blir

$$f'(x)=D[\arccos(\sqrt{x})]=-\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}D[\sqrt{x}]=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

Exempel: Bestäm derivatan av $f(x)=\arctan(\sin x)$.

Vi får

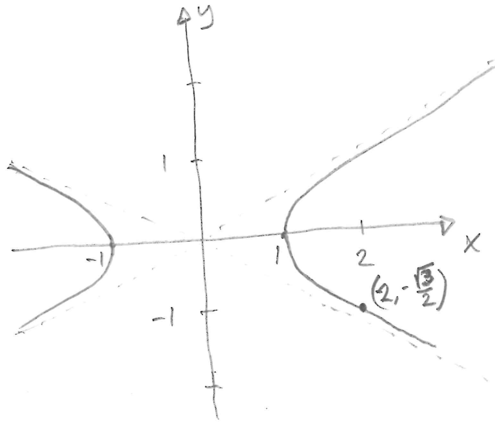
$$f'(x)=D[\arctan(\sin x)]=\frac{1}{1+\sin^2 x}D[\sin x]=\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}.$$

Vi kan nu derivera så gott som alla funktioner som kan skrivas $f(x)=\ldots$, dvs ett explicit uttryck med hjälp av de elementära funktionerna!

Ibland ges en funktion implicit, dvs funktionen ingår i en ekvation istället för på formen $f(x)=\ldots$ (om ekvationen går att lösa kan vi skriva om den så).

Exempel: Bestäm ekvationen för tangenten till hyperbeln $x^2-4y^2=1$ i punkten $(2,-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

I närheten av den aktuella punkten definierar ekvationen en funktion $y=y(x)$.



Deriverar vi bägge led i denna ekvation ger kedjeregeln

$$D[x^2 - 4y(x)^2] = D[1] \Leftrightarrow 2x - 4 \cdot 2y(x) \cdot y'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4y(x)y'(x) = x \Leftrightarrow y'(x) = \frac{x}{4y(x)}.$$

I punkten $(2, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ är alltså $y'(2) = \frac{2}{4 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2})} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Tangentens ekvation ges nu av enpunktsformeln:

$$y - (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2) \Leftrightarrow y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Exempel: En stor sfärisk ballong pumpas upp så att det varje sekund tillförs $0.1\ m^3$ luft. Hur snabbt växer ballongens radie i ögonblicket då radien är $1\ m$?

Volymen ges av $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, och vi kan se V som en funktion av antingen radien r eller tiden t. Genom att derivera volymen med avseende på t får vi

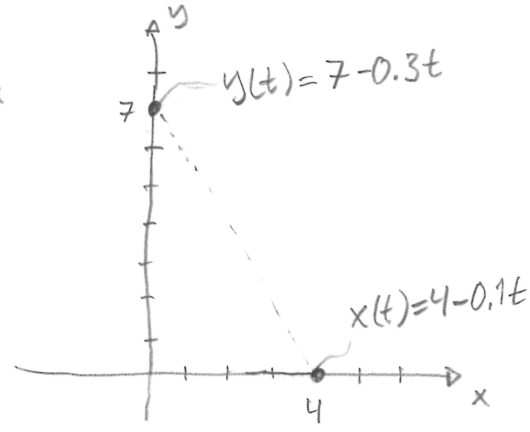
$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{4\pi r^2} = \frac{0.1}{4\pi \cdot 1^2}\ m/s = \frac{1}{40\pi}\ m/s \approx 8\ mm/s.$$

Exempel: Ett skepp i punkten $(0, 7)$ färdas mot origo med farten 0.3 (längdenheter per tidsenhet), och ett annat skepp i punkten $(4,0)$ färdas mot origo med farten 0.1.

Hur fort ändras avståndet mellan skeppen just nu?

Låt "just nu" vara tiden $t=0$.



Avståndet $d(t)$ mellan skeppen uppfyller Pythagoras sats:

$$d(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2.$$

Implicit derivering ger

$$2d(t)\cdot d'(t) = 2x(t)\cdot x'(t) + 2y(t)\cdot y'(t),$$

så $\quad d(0)\cdot d'(0) = x(0)\cdot x'(0) + y(0)\cdot y'(0).$

Här är allt känt utom $d'(0)$ (som ju efterfrågas).

Insättning ger

$$\sqrt{7^2+4^2}\cdot d'(0) = 4\cdot(-0.1) + 7\cdot(-0.3) \Leftrightarrow$$

$$d'(0) = -\frac{2.5}{\sqrt{65}} = -\frac{5}{2\sqrt{65}} \quad \left(\approx -\frac{5}{16} = -0.3125\right).$$