

## Extremvärden

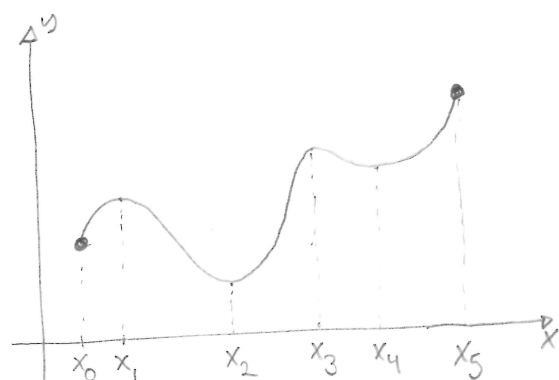
Definition: Låt  $f$  vara en funktion och  $x_0 \in D_f$ . Då kallas  $x_0$  för

- (i) global maxpunkt om  $f(x) \leq f(x_0)$  för alla  $x \in D_f$
- (ii) global minpunkt om  $f(x) \geq f(x_0)$  för alla  $x \in D_f$
- (iii) lokal maxpunkt om det finns ett  $\delta > 0$  sådant att  $f(x) \leq f(x_0)$  för alla  $x \in D_f$  som uppfyller  $|x - x_0| < \delta$
- (iv) lokal minpunkt om det finns ett  $\delta > 0$  sådant att  $f(x) \geq f(x_0)$  för alla  $x \in D_f$  som uppfyller  $|x - x_0| < \delta$

Motsvarande funktionsvärde,  $f(x_0)$ , kallas globalt/lokal min-/maxvärde. Globala/lokala max-/minpunkter kallas med ett ord extrempunkter, och globala/lokala max-/minvärden kallas tillsammans extremvärden.

Exempel: För funktionen i figuren

är  $x_0$ ,  $x_2$ , och  $x_4$  lokala minpunkter, medan  $x_1$ ,  $x_3$ , och  $x_5$  är lokala maxpunkter. Global minpunkt är  $x_2$ , och global maxpunkt är  $x_5$ .



(2.)

Anmärkning: En global max- eller minpunkt är alltid även lokal, men inte det omvända!

I exemplet ser vi att  $f'(x)=0$  i de inre lokala extrempunkterna.

Detta är inte en tillfällighet!

Sats: Låt  $f$  vara deriverbar på ett öppet intervall  $I$ , och låt  $a \in I$  vara en lokal maxpunkt (alternativt minpunkt). Då gäller att  $f'(a)=0$ .

Beris: Eftersom  $a$  är en lokal maxpunkt finns det ett  $\delta > 0$  sådant att  $f(x) \leq f(a)$  för alla  $x \in D_f$  med  $|x-a| < \delta$ , dvs om  $|h| < \delta$  gäller

$$f(a+h) \leq f(a) \Leftrightarrow$$

$$f(a+h) - f(a) \leq 0.$$



Tittar vi på funktionens höger- och vänsterderivata i  $a$  får vi

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0$$

och

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0.$$

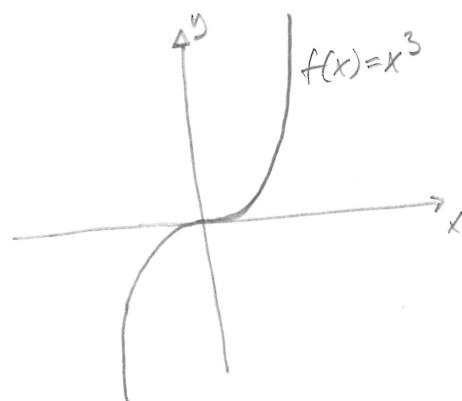
Eftersom  $f$  är deriverbar i  $a$  är  $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$ .

så  $0 \leq f'_-(a) = f'(a) = f'_+(a) \leq 0$ , dvs  $0 \leq f'(a) \leq 0$ .

Då måste  $f'(a) = 0$ .

Viktigt: Det omvända gäller inte! Om  $f'(a) = 0$  behöver inte  $a$  vara en maxpunkt eller minpunkt!

Exempel: Om  $f(x) = x^3$  blir  $f'(x) = 3x^2$ ,  
så  $f'(0) = 0$ . Dock är  $x = 0$   
varken en maxpunkt eller  
en minpunkt (den är  
en så kallad terrasspunkt).



För att bestämma maxpunkter och minpunkter för en given funktion behöver vi undersöka de kritiska punkterna (som oftast istället kallas stationära punkter), dvs  $x \in D_f$  där  $f'(x) = 0$ . Det finns dock fler ställen vi måste leta på!

Sats: Om  $f(x)$  har ett lokalt extremvärde i  $x_0 \in [a, b]$  så är  $x_0$  av någon av typerna

- (i) kritisk punkt, dvs  $f'(x_0) = 0$
- (ii) randpunkt, dvs  $x_0 = a$  eller  $x_0 = b$
- (iii) singular punkt, dvs  $f'(x_0)$  existerar inte

Beris: Ingår inte!

Exempel: Bestäm största och minsta värde för funktionen  $f(x)=x^2-x^4$  med  $D_f=[-1,2]$ . Största och minsta värde är funktionens globala extremvärden, och eftersom globala extremvärden även är lokala (men inte tvärtom!) talar föregående sats om var vi skall leta:

Kritiska punkter:

Derivatans är  $f'(x)=2x-4x^3=2x(1-2x^2)$ , och dess nollställen är  $x=0$  och  $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Randpunkter:  $x=-1$  och  $x=2$

Singulära punkter: Saknas (gäller alltid för polynom)

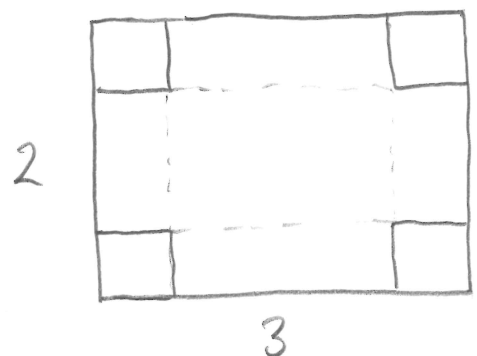
Totalt har vi alltså de fem punkterna  $x=-1$ ,  $x=0$ ,  $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ , och  $x=2$ , och största och minsta värde antas i någon/några av dessa. Insättning ger

$$f(-1)=0, \quad f(0)=0, \quad f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{4}, \quad \text{och} \quad f(2)=-12.$$

Största värde är alltså  $\frac{1}{4}$  som antas i punkterna  $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ , och minsta värde är  $-12$  som antas för  $x=2$ .

Exempel: Från en rektangulär plåt med sidolängderna 2 och 3 skall en låda (utan loch) tillverkas.

Detta sker genom att



(5.)

lika stora kvadratiska hörn skärs bort, varpå  
sidorna viks upp längs de streckade linjerna i figuren.

Bestäm sidan på de bortskurna kvadraterna så att  
lådans volym blir så stor som möjligt.

Om kvadraternas sida är  $x$  blir lådans volym

$$V(x) = x(3-2x)(2-2x) = x(6-10x+4x^2) = 4x^3 - 10x^2 + 6x$$

med  $D_V = [0, 1]$  (det går inte att ta bort mindre än noll,  
och inte heller mer än ett). Maximum kan antas i  
någon av följande:

Kritiska punkter:

Derivatans blir  $V'(x) = 12x^2 - 20x + 6$ , och dess  
nollställen ges av  $12x^2 - 20x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{20}{12}x + \frac{6}{12} = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} - \frac{1}{2}} = \frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{7}}{6}.$$

Här är det bara  $\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{7}}{6}$  som ligger i  $[0, 1]$ .

Randpunkter:  $x=0$  eller  $x=1$ .

Singulära punkter: saknas.

Insättning ger  $V(0) = V(1) = 0$  och  $V(\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{7}}{6}) = \dots = \frac{10+7\sqrt{7}}{27}$ .

Största volymen fås alltså då  $x = \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{7}}{6}$ .

(6.)

Exempel: Bestäm största och minsta värde för  $f(x) = e^{\sqrt[3]{x^2}}$  på  $[-1, 2]$ .

Extremvärdena kan antas i:

Kritiska punkter:

$$\begin{aligned} \text{Derivatan är } f'(x) &= D[e^{x^{2/3}}] = e^{x^{2/3}} D[x^{2/3}] = \frac{2}{3} e^{x^{2/3}} \cdot x^{-1/3} \\ &= \frac{2e^{x^{2/3}}}{3x^{1/3}}. \end{aligned}$$

Denna blir aldrig noll, så kritiska punkter saknas.

Randpunkter:  $x = -1$  och  $x = 2$ .

Singulära punkter:  $x = 0$  (eftersom  $f'(x)$  blir odefinierad).

Insättning ger

$$f(-1) = e^{\sqrt[3]{(-1)^2}} = e^{\sqrt[3]{1}} = e^1 = e$$

$$f(2) = e^{\sqrt[3]{2^2}} = e^{\sqrt[3]{4}}$$

$$f(0) = e^{\sqrt[3]{0}} = e^0 = 1.$$

Största värdet är  $f(2) = e^{\sqrt[3]{4}}$  och minsta värdet är  $f(0) = 1$ .