

Sammanställning av teori på MVE425, del C, våren 2020

- Formulera och bevisa satsen om sambandet mellan kontinuitet och deriverbarhet (avsnitt 6.4).

Sats Om en funktion f är deriverbar i en punkt $a \in D_f$ så är f även kontinuerlig i punkten a .

bevis Om f är deriverbar i a så existerar;

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

I så fall för vi att;

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a) + f(a)) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\rightarrow f'(a)} \cdot \underbrace{h}_{\rightarrow 0} + f(a) \right) =$$

$$= f'(a) \cdot 0 + f(a) = \underline{f(a)}$$

vilket visar att f är kont. i a . v.s.B

- Formulera och bevisa produktregeln (avsnitt 6.5).

Produkt
regeln

$$\boxed{D[f(x)g(x)] = Df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot Dg(x)}$$

bevis. $D[f(x)g(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\rightarrow f'(x)} \underbrace{g(x+h)}_{\rightarrow g(x)} + \underbrace{f(x)}_{\rightarrow f(x)} \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\rightarrow g'(x)} \right] =$$

ty g deriverbar
⇒ g kontinuerlig

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{VSB.}$$

- Visa utifrån derivatans definition att $D[\sin x] = \cos x$ (avsnitt 6.6).

Det är tillåtet att använda gränsvärdena $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ och $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$ utan bevis.

bevis. $f(x) = \sin x \Rightarrow$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

additionsformel
för sinus.

$$= \frac{\sin x \cdot \cosh + \cos x \cdot \sinh - \sin x}{h} =$$

$$= \sin x \underbrace{\frac{\cosh - 1}{h}}_{\rightarrow 0} + \cos x \cdot \underbrace{\frac{\sinh}{h}}_{\rightarrow 1} \rightarrow \cos x, \text{ då } h \rightarrow 0$$

enl. sats
i avs. 5.3

→

VSB

- Visa utifrån derivatans definition att $D[e^x] = e^x$ (avsnitt 6.6).

Det är tillåtet att använda gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ utan bevis.

bevis. $f(x) = e^x \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \\ &= e^x \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\rightarrow 1 \text{ enl. (*)}} \rightarrow e^x, \text{ då } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1} \quad (*)$$

- Visa att $D[\ln x] = \frac{1}{x}$ (avsnitt 6.6). Det är tillåtet att använda implicit derivering.

$f(x) = \ln x \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \\ &= \underbrace{\frac{\ln(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}}_{\rightarrow 1 \text{ enl. (**)}} \cdot \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x}, \text{ då } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

obs! $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{h}{x} \rightarrow 0$ VSB.

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\ln(1+k)}{k} = 1} \quad (**)$$

... eller alternativt (välj själv)

$$\begin{aligned} \underline{y = \ln x} &\Leftrightarrow e^y = x \Rightarrow \text{implicit derivering} \\ e^y \cdot y' &= 1 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{e^y} \Leftrightarrow \underline{y' = \frac{1}{x}} \quad \text{VSB} \end{aligned}$$

- Visa att $D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$ (avsnitt 6.6). Det är tillåtet att använda implicit derivering.

$$y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y \stackrel{(*)}{=} x, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

Implicit derivering av (*) m.a.p. x ger;

$$(1 + \tan^2 y) y' = 1 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{1 + \tan^2 y} \Leftrightarrow \begin{matrix} \uparrow \\ \text{enl.} \\ (*) \end{matrix}$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}, \text{ vilket visar att;}$$

$$\boxed{D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}}$$

- Formulera Lagranges medelvärdessats (avsnitt 7.2).

Sats ^{Lagrange} (medelvärdessats) Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) så finns det minst en punkt $\xi \in (a, b)$ sådan att;

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

- Formulera satsen om derivatans tecken och växande/avtagande funktioner (följsatsen till Lagranges medelvärdessats på sida 202, avsnitt 7.2). Bevisa valfritt fall förutom fallet $f'(x) = 0$.

Följsats. Om $f(x)$ är deriverbar i ett intervall I så gäller;

- ① $f'(x) < 0$, för alla $x \in I \Rightarrow f(x)$ är strängt avtagande i I
- ② $f'(x) = 0$, för alla $x \in I \Rightarrow f(x)$ är konstant i I
- ③ $f'(x) > 0$, för alla $x \in I \Rightarrow f(x)$ är strängt växande i I

bevis Antag att $x_1, x_2 \in I$ och att $x_1 < x_2$.

Eftersom $[x_1, x_2]$ är ett delintervall av I så är f deriverbar på $[x_1, x_2]$ och därmed även kontinuerlig där. Av medelvärdessatsen följer därför att det finns minst ett $\xi \in (x_1, x_2)$ sådant att;

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Av detta följer att;

- ① $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{< 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} < 0 \Rightarrow \underline{f(x_2) < f(x_1)}$
 $\therefore$ str. avtagande
- ② $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{= 0} (x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow \underline{f(x_2) = f(x_1)}$
 $\therefore$ konstant
- ③ $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{> 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} > 0 \Rightarrow \underline{f(x_2) > f(x_1)}$
 $\therefore$ str. växande

VSB.