

5.14 Visa att om p är ett primtal
och a ett naturligtal så att
 $p|a^2$, då $p^2|a^2$.

Uttryck a i dess unika primtalsfaktorisering.

$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n$ där p_i är primtal för $i=1 \dots n$.

Vi vet att

$$\frac{a^2}{p} = \frac{p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \dots \cdot p_n^2}{p}$$

är ett heltal.

Vi måste ha $p = p_k$ för något $k \in \{1, \dots, n\}$. Annars
är inte p ett primtal.

Men då

$$\frac{a^2}{p^2} = \frac{p_1^2 \cdot \dots \cdot p_n^2}{p_k^2} = \frac{p_1^2 \cdot \dots \cdot p_n^2}{p_k^2}$$

$$= p_1^2 \cdot \dots \cdot p_{k-1}^2 \cdot p_{k+1}^2 \cdot \dots \cdot p_n^2 \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow p^2 | a^2.$$

5.15
För vilka naturliga tal n gäller det att
 $n^2 - 1$ är ett primtal.

Utnyttja kongruensregeln. $(a^2 - b^2 = (a+b)(a-b))$

Vi har $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$.

Denna faktorisering ger att $n^2 - 1$ inte
är ett primtal så länge som $n+1 \neq 1 \wedge (n-1) \neq 1$.
Skulle kunna vara ett primtal för $n=0$ och

$n=2$.

$n=0$, $n^2 - 1 = -1$, ej ett naturligt tal

$n=2$, $n^2 - 1 = 4 - 1 = 3$, vilket är ett primtal.

$\Rightarrow n^2 - 1$ är ett primtal endast då $n=2$.

7.4

Visa att relationen "delar",
dvs a relationad till b om
 $a|b$ är en partell ordning
på $\mathbb{N}$, men ej på $\mathbb{Z}$.

En relation R är en
partell ordning om R är

- reflexiv $xRx \forall x$
- antisymmetrisk $(xRy) \wedge (yRx) \Rightarrow x=y$
- transitiv $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Börjar med att visa att "delar" är en partell ordning.

• reflexiv?

Låt $a \in \mathbb{N}$. Vi har att $a|a$, eftersom $\frac{a}{a} = 1 \in \mathbb{N}$. Så "delar" är reflexiv.

• antisymmetrisk?

Låt $a, b \in \mathbb{N}$. Så att $a|b \wedge b|a$
 $\Rightarrow a \leq b$ (annars är $0 < \frac{a}{b} < 1$, alltså ej i $\mathbb{N}$). men också $b \leq a \Rightarrow a=b$.

Så relationen är antisymmetrisk.

• transitiv?

Låt $a, b, c \in \mathbb{N}$ så att
 $c = b \cdot d$, $d \in \mathbb{N}$.

$a|b$, $b|c$. $b|c$ ger oss att
 $\frac{c}{a} = \frac{b \cdot d}{a} \in \mathbb{N}$ eftersom $a|b$. Relationen är
transitiv.