Lösningsförslag tenta 210115

1) Argumentet är ogiltigt.

För att visa det antar vi att hypoteserna är sanna och slutsatsen falsk, och ser vad som händer

r F, så om $w \rightarrow (r \wedge \neg s)$ är sann måste w F.

Om $u\ v\ w$ S får vi u S.

u S och $u \rightarrow (\neg t)$ S ger $\neg t$ S, dvs t F.

Då är $(\neg r \wedge t) \rightarrow \neg u$ S, eftersom t F.

Så om r, t och w är F och u S (och s är godtyckligt) så är hypoteserna sanna och slutsatsen falsk.

Scanned with CamScanner

2.) $x^2 - x - 1 = 0$ har lösningarna

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Om $T(n) = C\alpha^n + D\beta^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$ så är

$$\begin{cases} 0 = T(0) = C + D & (1) \\ \sqrt{5} = T(1) = C\alpha + D\beta & (2) \end{cases}$$

Ekvation (1) ger $D = -C$. Ekvation (2) ger då $\sqrt{5} = C\alpha - C\beta = C \cdot \sqrt{5}$, så $C = 1$ och därmed är $D = -1$.

Vi visar nu med induktion att

$$T(n) = \alpha^n - \beta^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Basfallen $n = 0, 1$ håller enligt ovan.

För induktionssteget, antag att

Scanned with CamScanner

$n \geq 2$ och att $T(n-1) = \alpha^{n-1} - \beta^{n-1}$ och

$T(n-2) = \alpha^{n-2} - \beta^{n-2}$. Då är

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) =$$

$$= \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} + \alpha^{n-2} - \beta^{n-2} =$$

$$= \alpha^{n-2}(\alpha+1) - \beta^{n-2}(\beta+1) =$$

$$= \alpha^{n-2}\alpha^2 - \beta^{n-2}\beta^2 = \alpha^n - \beta^n$$

som vi ville (vi har använt att $\alpha+1 = \alpha^2$ och $\beta+1 = \beta^2$, eftersom α och β löser ekvationen $x^2 = x+1$).

3. Jag löser ekvationssystemet för $a = 5$, dvs

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \equiv 0 & (7) \\ x \equiv 7 & (13). \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

Ekvationen $x^2 - 3x + 2 \equiv 0 \quad (7)$

kan lösas genom kvadratkomplettering eller faktorisering.

Kvadratkomplettering:

$x^2 - 3x + 2 \equiv x^2 + 4x + 2 \equiv (x+2)^2 - 2 \quad (7)$,

så vi skall lösa $(x+2)^2 \equiv 2 \quad (7)$.

Kvadraterna modulo 7 är

$0^2 \equiv 0$, $1^2 \equiv 1$, $2^2 \equiv 4$, $3^2 \equiv 2$, $4^2 \equiv 2$, $5^2 \equiv 4$, $6^2 \equiv 1$.

så antingen $x+2 \equiv 3 \quad (7)$ eller

$x+2 \equiv 4 \quad (7)$, dvs $x \equiv 1 \quad (7)$ eller

$x \equiv 2 \quad (7)$.

Om $x \equiv 1 \quad (7)$, så är $x = 1 + 7y$, $y \in \mathbb{Z}$.

Substitution i $x \equiv 7 \quad (13)$ ger

$1 + 7y \equiv 7 \quad (13)$, dvs

Scanned with CamScanner

$$7y \equiv 6 \quad (13)$$

Inversen till 7 mod 13 är 2, så vi får

$$y \equiv 12 \equiv -1 \quad (13), \text{ dvs}$$

$y = -1 + 13n$, $n \in \mathbb{Z}$ och därmed

$$x = 1 + 7y = 1 + 7(-1 + 13n) =$$
$$= -6 + 91n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Om istället $x \equiv 2 \ (7)$ har vi $x = 2 + 7z$, $z \in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 2 + 7z \equiv 7 \quad (13) \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 7z \equiv 5 \ (13) \Rightarrow z \equiv 10 \equiv -3 \ (13)$

Så $x = 2 + 7z = 2 + 7(-3 + 13m) =$

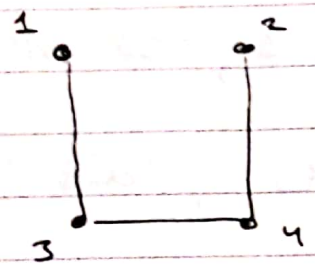
$$= -19 + 91m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Alltså har ekvationssystemet lösningarna

$$\begin{cases} -6 + 91n, & n \in \mathbb{Z}, \\ -19 + 91m, & m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

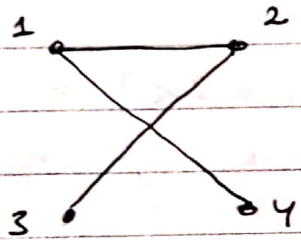
Scanned with CamScanner

4) a) Grafen



är sammanhängande

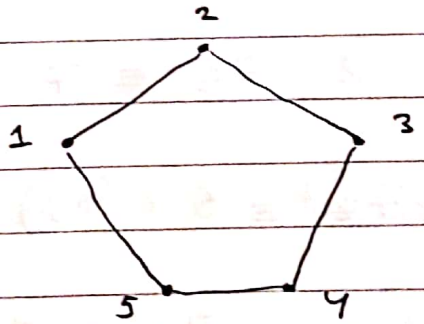
och har komplementgraf



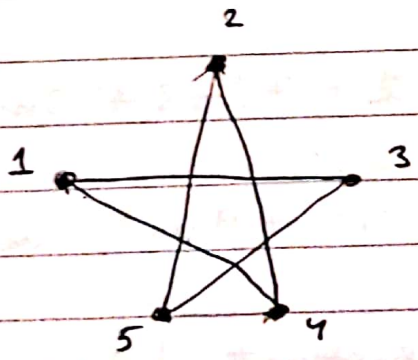
som också är sammanhängande.

b)

G =



G^c =



Bijektionen $f : \{1,2,3,4,5\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5\}$

med $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5$,

$f(4) = 2$ och $f(5) = 4$ är en isomorfi

Scanned with CamScanner

från G till G^c.

5) a) Universum: $U = \{\text{alla grafer}\}$

$S(x)$: x är sammanhängande.
$E(x)$: x har en Eulerväg.

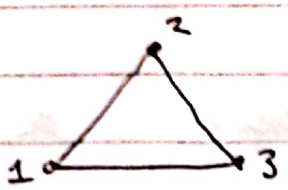
$$\forall x \in U : \left(\neg S(x) \wedge \neg E(x)\right) \vee \left(S(x) \wedge E(x)\right).$$

b) Universum: $V = \{\text{alla vägar i } G\}$.

$C(x)$: x är en cykel.
$E(x)$: x är en Eulercykel.

$$\left(\exists x \in V : C(x)\right) \wedge \left(\forall x \in V : C(x) \rightarrow E(x)\right)$$

c) $G =$



Eftersom en cykel inte får ha upprepade kanter och måste börja och sluta på

samma ställe så finns endast sex cykler i G:

$1 \to 2 \to 3 \to 1$
$2 \to 3 \to 1 \to 2$
$3 \to 1 \to 2 \to 3$
$1 \to 3 \to 2 \to 1$
$2 \to 1 \to 3 \to 2$
$3 \to 2 \to 1 \to 3$.

Samtliga dessa är Eulercyklar.

6. a) $\sim$ är symmetrisk:

$a \sim b \Leftrightarrow \exists n : b - a = n^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a - b = (-n)^3 \to b \sim a$.

$\sim$ är reflexiv: $a \sim a$ eftersom

$a - a = 0^3$.

Scanned with CamScanner

$\sim$ är inte en ekvivalensrelation, eftersom $\sim$ inte är transitiv:

$0 \sim 1$ ty $1 - 0 = 1^3$, och
$1 \sim 9$, ty $9 - 1 = 2^3$, men

$0 \not\sim 9$, eftersom $9 = 9 - 0$ inte är lika med n^3 för något $n \in \mathbb{Z}$.

b) $X_0 \neq X_1$ eftersom

$9 \in X_1$ men $9 \notin X_0$ enligt lösningen till del a).

$X_0 \cap X_1 \neq \emptyset$ eftersom

$0 \in X_0$ och $0 \in X_1$ enligt lösningen till a).

Scanned with CamScanner

7. a) Vi har 5 val för vilken position den udda siffran skall ha. Eftersom det finns 5 udda siffror mellan 1 och 9 och 4 jämna får vi

$5 \cdot 5 \cdot 4^4 = 80^2 = 6400$ sådana tal.

b) Vi delar upp i fall. Det finns fyra primtal $(2, 3, 5, 7)$ mellan 1 och 9.

Exakt 3 primtal

$\binom{5}{3}$ positioner för primtalen ger

$\binom{5}{3} \cdot 4^3 \cdot 5 \cdot 4 = 12800$

$\binom{5}{3}$: positioner för primtalen

4^3: 4 val av primtal för varje position

$5 \cdot 4$: val av övriga siffror – vi har två positioner kvar och siffrorna skall vara olika och inte primtal.

Scanned with CamScanner

Exakt 4 primtal:

$$\binom{5}{4} \cdot 4^4 \cdot 5 = 5^2 \cdot 4^4 = 6400 \text{ tal.}$$

Exakt 5 primtal: $4^5 = 2^{10} = 1024$ tal.

Totalt får vi $12800 + 6400 + 1024 =$

$= 19200 + 1024 = 20224$ tal med minst tre primtal och övriga siffror olika.

c) Vi delar upp i fall:

0 av de två första siffrorna är jämna:

Vi får

$$5 \cdot 4 \cdot 4^3 = 1280 \text{ tal}$$

första siffran är udda

andra siffran är udda och inte lika med första siffran

resterande tre siffror är jämna.

Scanned with CamScanner

1 av de två första siffrorna är jämn

$2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4^2 = 9600$ tal

- 2: val av position för den jämna siffran bland de två första
- 4: val av jämn siffra
- 5: val av udda siffra
- 3: val av position av den udda siffran bland de tre sista
- 5: val av udda siffra
- 4^2: val av jämna siffror

De två första siffrorna är jämna:

$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5^2 = 3600$ tal.

- 4: första siffran
- 3: andra siffran
- 3: val av position för den jämna siffra bland de tre sista
- 4: val av jämn siffra
- 5^2: val av udda siffra.

Totalt får vi $1280 + 9600 + 3600 = 14480$ sådana tal.

Scanned with CamScanner