

MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
TMV200 – Diskret matematik

Tentamen: 2021-01-15, 14.00–18.00

Betygsgränser: 20 poäng – 3, 30 poäng – 4, 40 poäng – 5, 50 poäng totalt

Inlämning: Efter kl 18.00 har du 30 minuter på dig att skanna dina lösningar till *en* pdf-fil och lämna in den i Canvas (som inlämning på uppgiften där du hittade tentan). Om (och endast om!) du pga tekniska problem inte kan ladda upp din pdf i Canvas skall du skicka den från ditt Chalmers-mejlkonto till chrjohv@chalmers.se.

Observera: Poäng ges huvudsakligen för korrekta beräkningar, argument och motive-ringar. Endast svar ger ingen poäng om inte annat anges.

1. Avgör om följande argument är giltigt eller ej:

$$\frac{\begin{array}{c} w \rightarrow (r \wedge (\neg s)) \\ u \vee w \\ ((\neg r) \wedge t) \rightarrow (\neg u) \\ u \rightarrow (\neg t) \end{array}}{r}$$

Om argumentet är giltigt, förklara varför. Om det inte är giltigt, ge ett motexempel. (6p)

2. Definiera en talföljd $T(n)$, $n \in \mathbb{N}$, genom

$$\begin{cases} T(0) = 0; \\ T(1) = \sqrt{5}; \\ T(n) = T(n-1) + T(n-2), \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Beräkna lösningarna till andragradsekvationerna $x^2 - x - 1 = 0$. Låt α vara den största lösningen och β den minsta. Visa att det finns konstanter C och D så att

$$T(n) = C\alpha^n + D\beta^n$$

för alla $n \in \mathbb{N}$, och beräkna värdet på dessa konstanter. (7p)

3. Låt a vara numret på din födelsemånad (så om ditt födelsedatum är 19761228 så skall du sätta $a = 12$). Bestäm alla lösningar och den minsta positiva lösningen till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \equiv 0 & (7) \\ x \equiv a + 2 & (13). \end{cases} \quad (7p)$$

Var god vänd!

4. Låt $G = (V, E)$ vara en (vanlig) graf. *Komplementgrafen* G^c till G är den graf som har samma nodmängd V som G och där det finns en kant mellan noderna $i, j \in V$ i G^c om och endast om det *inte* finns en kant mellan i och j i G .

(a) Konstruera en graf G med 4 noder så att både G och G^c är sammanhängande. (3p)

(b) Låt $G = (V, E)$ vara 5-cykeln, dvs grafen med $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och

$$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 1\}\}.$$

Rita G och G^c och visa att de är isomorfa. (4p)

5. (a) Betrakta påståendet "Alla grafer är antingen inte sammanhängande eller har en Eulerväg". Skriv det på predikatlogisk form (glöm inte att definiera ett lämpligt universum). (3p)

(b) Låt G vara en graf. Betrakta påståendet " G har cykler och samtliga cykler i G är Eulercykler". Skriv det på predikatlogisk form. (2p)

(c) Konstruera en graf G så att påståendet i (b) är sant för G . (3p)

6. Definiera en relation $\sim$ på $\mathbb{Z}$ genom att säga att $a \sim b$ om $b - a = n^3$ för något $n \in \mathbb{Z}$.

(a) Är $\sim$ reflexiv? Är $\sim$ symmetrisk? Är $\sim$ en ekvivalensrelation? (4p)

(b) För $a \in \mathbb{Z}$, definiera $X_a = \{b \in \mathbb{Z} \mid a \sim b\}$. Är $X_0 = X_1$? Är $X_0 \cap X_1 = \emptyset$? (3p)

7. Hur många femsiffriga tal *utan nollor* finns det där ...

(a) exakt en siffra skall vara udda? (2p)

(b) minst tre siffror skall vara primtal, och övriga siffror skall vara olika? (3p)

(c) de två första siffrorna skall vara olika, och tre siffror skall vara jämna? (3p)

Lycka till!
Christian