Lösningsförslag 210408

Anteckningsbok:	Lösningar omtentamen TMV200		
Skapad:	2021-04-16 13:48	**Ändrad:**	2021-04-16 22:03
Författare:	hchristian.johansson@gmail.com		

Lösningsförslag Omtenta TMV200 8/4

1. Vi provar ett motsägelsebevis och antar att hypoteserna är sanna men slutsatsen är falsk:

$$\begin{array}{rl}
(\neg t) \rightarrow q & S \\
(q \rightarrow p) \rightarrow t & S \\
p \rightarrow s & S \\
q \leftrightarrow (\neg s) & S \\
\hline
s \vee t & F
\end{array}$$

$s \vee t$ falsk $\Rightarrow$ s falsk och t falsk.

$p \rightarrow s$ sann & s falsk $\Rightarrow$ p falsk

$(q \rightarrow p) \rightarrow t$ sann & t falsk $\Rightarrow$ $q \rightarrow p$ falsk $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ q sann eftersom p är falsk.

Att $q \leftrightarrow (\neg s)$ är sann stämmer med q sann och s falsk.

Slutligen stämmer även $(\neg t) \rightarrow q$ sann då q är sann.

Alltså är argumentet ogiltigt, med motexempel:

p falsk, q sann, s falsk, t falsk.

2. Vi bevisar att $x_n = 3^n - 2^n$ med induktion.

Sätt $f(n) = 3^n - 2^n$. Vi vill visa $x_n = f(n)$.

Basfall:

$n=0$: $\quad x_0 = 0$, $f(0) = 3^0 - 2^0 = 1-1 = 0$ ok

$n=1$: $\quad x_1 = 1$, $f(1) = 3-2 = 1$ ok

$n=2$: $\quad x_2 = 5$, $f(2) = 3^2 - 2^2 = 9-4 = 5$ ok.

Induktionssteg: Antag att $n \geq 3$, samt att $f(k) = x_k$ för alla $k < n$.

Då har vi

$$x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3} \overset{\text{induktions-antagande}}{=}$$
$$= 6f(n-1) - 11f(n-2) + 6f(n-3) =$$
$$= 6(3^{n-1} - 2^{n-1}) - 11(3^{n-2} - 2^{n-2}) + 6(3^{n-3} - 2^{n-3}) =$$
$$= 6\cdot 3^{n-1} - 6\cdot 2^{n-1} - 11\cdot 3^{n-2} + 11\cdot 2^{n-2} + 6\cdot 3^{n-3} - 6\cdot 2^{n-3} =$$
$$= 6\cdot 3^{n-1} - 11\cdot 3^{n-2} + 6\cdot 3^{n-3} - 6\cdot 2^{n-1} + 11\cdot 2^{n-2} - 6\cdot 2^{n-3} =$$
$$= 3^{n-3}(6\cdot 3^2 - 11\cdot 3 + 6) - 2^{n-3}(6\cdot 2^2 - 11\cdot 2 + 6) =$$
$$= 3^{n-3}(54 - 33 + 6) - 2^{n-3}(24 - 22 + 6) =$$
$$= 3^{n-3}\cdot 27 - 2^{n-3}\cdot 8 = 3^n - 2^n = f(n).$$

Alltså är induktionssteget ok, och formeln är bevisad med induktion.

3. Vi löser uppgiften med födelsedatum 19761228, dvs $a = 12$.

Vi börjar med att lösa $x^3 \equiv 2 \ (5)$ med trial and error:

x:	0	1	2	3	4
x^3 (5):	0	1	$8 \equiv 3 \ (5)$	$27 \equiv 2 \ (5)$	$64 \equiv 4 \ (5)$

Alltså ser vi att $x^3 \equiv 2 \ (5) \iff x \equiv 3 \ (5)$,
så vi har nu det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x \equiv 3 \ (5) \\ x \equiv 15 \ (18) \end{cases}$$

Första ekvationen ger $x = 3 + 5y$ för $y \in \mathbb{Z}$.
Insättning i andra ekvationen ger

$$3 + 5y \equiv 15 \ (18) \iff 5y \equiv 12 \ (18)$$

Vi kan invertera 5 modulo 18 med hjälp av Euklides algoritm:

$$\begin{array}{l|l} 18 = 5 \cdot 3 + 3 & 1 = 3 - 2 = \\ 5 = 3 \cdot 1 + 2 & \quad = 3 - (5 - 3) = 2 \cdot 3 - 5 = \\ 3 = 2 \cdot 1 + 1 & \quad = 2 \cdot (18 - 5 \cdot 3) - 5 = \\ & \quad = 2 \cdot 18 - 7 \cdot 5 \end{array}$$

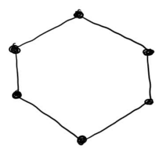
Så -7 är inversen till 5 mod 18.
Alltså får vi att $5y \equiv 12 \ (18) \iff$

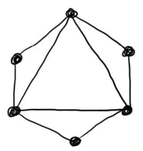
$$\iff y \equiv (-7) \cdot 12 = -84 \equiv 6 \ (18),$$

så $y = 6 + 18n$, $n \in \mathbb{Z}$, och

$$x = 3 + 5(6 + 18n) = 33 + 90n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Minsta positiva lösningen är $x = 33$.

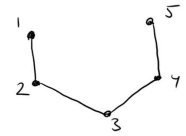
4. a) Låt $G_1 =$  och

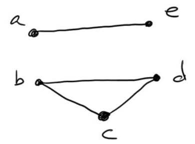
$G_2 =$  .

Både G_1 och G_2 har Eulercykler enligt sats från kursen, då samtliga gradtal i G_1 och G_2 är jämna.

G_1 och G_2 är inte isomorfa då de inte har samma antal kanter (G_1 har 6 kanter,

G_2 har 9 st).

b) Låt $G_3 =$  och

$G_4 =$  ,

med $V_3 = \{1,2,3,4,5\}$ och $V_4 = \{a,b,c,d,e\}$ enligt ovan.

Vi definierar $f : V_3 \longrightarrow V_4$ genom

$f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = d$, $f(5) = e$.

Då gäller att n och $f(n)$ har samma gradtal, och f är en bijektion.

Men G_3 och G_4 är inte isomorfa, då G_3 är sammanhängande men G_4 inte är det.

5. För a) och b), låt universum $\mathcal{U}$ vara mängden av alla funktioner $g : M \longrightarrow B$, med $M \subseteq A$.

a) Definiera ett predikat

$$P(g) = g \text{ är surjektiv}$$

Då är påståendet

$$(P(f_S) \vee P(f_T)) \longrightarrow P(f).$$

b) Definiera ett predikat

$$I(g) = g \text{ är injektiv.}$$

Då är påståendet

$$(I(f_S) \wedge I(f_T)) \longrightarrow I(f).$$

c) Påståendet i a) är sant:

f surjektiv $\iff f(A) = B$.

Notera att $A = S \cup T \Rightarrow f(A) = f(S) \cup f(T)$

och att $f(S) = f_S(S)$ och $f_T(T) = f(T)$

per definition. Alltså, om $f_S(S) = B$ eller

$f_T(T) = B$, så måste också $f(A) = B$.

Påståendet i b) är falskt. Ta exempelvis

$A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, $S = \{1\}$, $T = \{2\}$ och

$f : A \to B$ definierad av $f(1) = f(2) = 1$.

$f_S : \{1\} \to \{1\}$ och $f_T : \{2\} \to \{1\}$

är bägge injektiva, men f är inte injektiv.

6. a) Det kan göras på

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{3}{3} \cdot \frac{1}{3!} \text{ sätt}$$

$\binom{6}{2}$	$\binom{9}{3}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{2}{2}$	$\binom{3}{3}$	$\frac{1}{3!}$
backer till första femman	forwards till första femman	backer till andra femman	forwards till andra femman	backer till tredje femman	forwards till tredje femman	ordningen på femmorna spelar ingen roll.

Förenkling:

$$\binom{6}{2}\binom{9}{3}\binom{4}{2}\binom{6}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6} =$$

$$= 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 25200 \text{ sätt.}$$

b) Välj en numrering av femmorna (vilken spelar ingen roll).

Skriv 1B för backparet i första femman och 1F för forwardstrion i första femman, etc.

1B måste spela med 2F eller 3F.

Om 1B spelar med 2F måste 3B spela med 1F, och då 2B med 3F.

Om 1B spelar med 3F måste 2B spela med 1F, och då 3B med 2F.

Alltså kan ändringen göras på 2 sätt.

7. För att bestämma f behöver vi välja $k \in \{1, ..., n-1\}$ som i definitionen samt en delmängd $A \subseteq \{1, ..., n\}$ så att A har k element och det största talet i A är större än det minsta talet som inte är i A, dvs vi kan inte välja $A = \{1, ..., k\}$ men allt annat går.

Alltså finns det

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n}{k} - 1 \right) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \right) - (n-1) =$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right)}_{=2^n} - \binom{n}{0} - \binom{n}{n} - n + 1 =$$

$$= 2^n - 1 - 1 - n + 1 = 2^n - n - 1$$

sådana funktioner.