

MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
TMV200 – Diskret matematik

Tentamen: 2021-04-08, 14.00–18.00

Betygsgränser: 20 poäng – 3, 30 poäng – 4, 40 poäng – 5, 50 poäng totalt

Inlämning: Efter kl 18.00 har du 30 minuter på dig att skanna dina lösningar till *en* pdf-fil och lämna in den i Canvas (som inlämning på uppgiften där du hittade tentan). Om (och endast om!) du pga tekniska problem inte kan ladda upp din pdf i Canvas skall du skicka den från ditt Chalmers-mejlkonto till chrjohv@chalmers.se.

Observera: Poäng ges huvudsakligen för korrekta beräkningar, argument och motive-ringar. Endast svar ger ingen poäng om inte annat anges.

1. Avgör om följande argument är giltigt eller ej:

$$\frac{\begin{array}{l} (\neg t) \rightarrow q \\ (q \rightarrow p) \rightarrow t \\ p \rightarrow s \\ q \leftrightarrow (\neg s) \end{array}}{s \vee t}$$

Om argumentet är giltigt, förklara varför. Om det inte är giltigt, ge ett motexempel. (6p)

2. Definiera en talföljd x_n , $n \in \mathbb{N}$, genom

$$\begin{cases} x_0 = 0; \\ x_1 = 1; \\ x_2 = 5; \\ x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Visa att

$$x_n = 3^n - 2^n$$

för alla $n \in \mathbb{N}$. (7p)

3. Låt a vara numret på din födelsemånad (så om ditt födelsedatum är 19761228 så skall du sätta $a = 12$). Bestäm alla lösningar och den minsta positiva lösningen till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^3 \equiv 2 & (5) \\ x \equiv a + 3 & (18). \end{cases} \quad (7p)$$

Var god vänd!

4. (a) Konstruera två grafer G_1 och G_2 som bägge har 6 noder och bägge har Eulercykler, men som inte är isomorfa (motivera varför de grafer du ritat har Eulercykler). (4p)

(b) Konstruera två grafer $G_3 = (V_3, E_3)$ och $G_4 = (V_4, E_4)$, bägge med 5 noder, som inte är isomorfa, men där det finns en bijektion $f : V_3 \rightarrow V_4$ så att v och $f(v)$ har samma gradtal för alla $v \in V_3$. Glöm inte att definiera bijektionen f . (4p)

5. Låt A och B vara mängder och $f : A \rightarrow B$ en funktion. Om $C \subseteq A$ är en delmängd så skriver vi f_C för restriktionen av f till C , dvs funktionen

$$f_C : C \rightarrow B$$

definierad av $f_C(x) = f(x)$ för alla $x \in C$. Antag nu att S och T är två *äkta* delmängder till A med $A = S \cup T$.

(a) Betrakta påståendet "Om f_S eller f_T är surjektiv, så är f surjektiv". Skriv det på predikatlogisk form (glöm inte att definiera ett lämpligt universum). (2p)

(a) Betrakta påståendet "Om f_S och f_T är injektiva, så är f injektiv". Skriv det på predikatlogisk form. (2p)

(c) Avgör, med bevis eller motexempel, om påståendena i (a) och (b) är sanna eller falska. (3p)

6. En innebandytränare har 6 backar och 9 forwards i sin trupp inför en match.

(a) Tränaren skall ta ut tre femmor som skall spela matchen. Varje femma skall innehålla exakt två backar (ett "backpar") och tre forwards (en "forwardstrio"). På hur många sätt kan tränaren ta ut tre femmor? Ordningen på femmorna spelar ingen roll. (4p)

(b) Inför tredje perioden vill tränaren ändra lite i femmorna. Hon behåller samma backpar och samma forwardstrios, men ändrar femmorna så att varje backpar spelar med en annan forwardstrio än de tidigare gjort. På hur många sätt kan det göras? Ordningen på de nya femmorna spelar ingen roll. (3p)

7. Låt n vara ett positivt heltal och låt $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Vi säger att en bijektion $f : A \rightarrow A$ består av två stigande talföljder om det finns ett $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ så att

$$\begin{aligned} f(k) &> f(k+1); \\ f(1) &< f(2) < \dots < f(k); \\ f(k+1) &< f(k+2) < \dots < f(n). \end{aligned}$$

Hur många sådana bijektioner finns det? För full poäng krävs ett svar som inte innehåller binomialkoefficienter. Upp till tre poäng kan fås om man löser specialfallet $n = 5$. (8p)

Lycka till!
Christian

