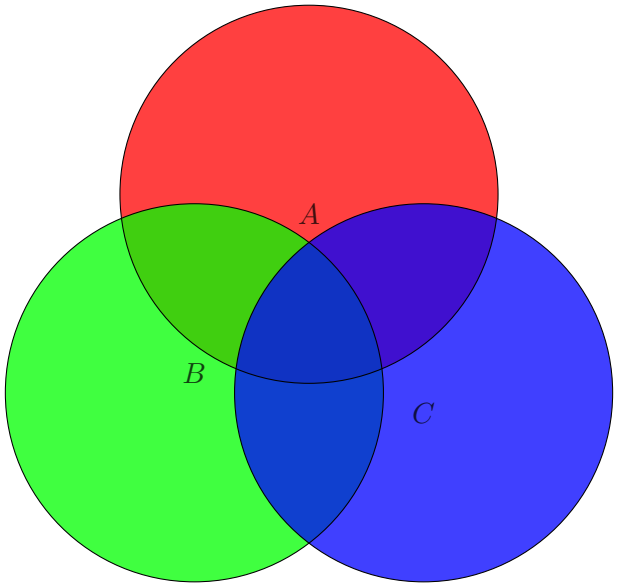
Matematikintroduktion

Jonathan Nilsson

Senast uppdaterad den 17 augusti 2020



Till läsaren

Denna text består av föreläsningsanteckningar till en kort matematikintroduktion på fyra föreläsningar för D/IT/DV på Chalmers och Göteborgs universitet. Texten är tänkt som ett komplement till video-föreläsningarna som publiceras på kurshemsidan. Det är tänkt att man ska kunna följa texten även utan videoklippen, men ibland ibland ritar jag fler bilder och räknar större exempel på videorna. Innehållet är översiktligt om logik, mängder, funktioner, och summor. Dessa koncept kommer du antagligen att möta ofta i framtida kurser, så denna minikurs ger en god möjlighet att få ett försprång.

Varje del har ett antal tillhörande övningsuppgifter. Uppgifter markerade med $\star$ och $\star\star$ är ofta extra kluriga och utmanande och ska ses som extrauppgifter. Om man fastnar på dessa för länge är det bäst att gå vidare. Man förväntas inte hinna lösa alla uppgifter på den utsatta övningstiden, så det kan vara en god idé att försöka räkna ett par standarduppgifter i förväg så att man kan fokusera på de svårare uppgifterna på övningstiden.

Längst bak i texten finns ett facit till alla uppgifter och ibland även lösningar och kommentarer. Det kan lätt bli så att man tittar på facit för snabbt - innan man hunnit tänka igenom om man verkligen gjort rätt. Så jag vill ge dig en utmaning: försök lösa så många övningsuppgifter på varje kapitel du kan innan du tittar på svaren!

Lycka till med kursen!

Del I

Logik

Vad är logik?

Logik är en lära som ligger någonstans mellan filosofi och matematik. Kort sagt kan man säga att logik handlar om hur man på ett korrekt vis kan gå från antaganden till slutsatser.

Utsagor

Här är ett antal påståenden:

1. 5 är mindre än 8
2. En produkt av udda tal är alltid udda
3. Om de korta sidorna i en rätvinklig triangel har längderna a och b så har den längsta sidan längden $\sqrt{a^2 + b^2}$
4. Alla udda tal är primtal[1]
5. x ligger mellan 2 och 7
6. Matematik är bäst

Påstående $1, 2, 3$ är uppenbart sanna och påstående 4 är falskt. De två sista påståendena är dåligt definierade: det är oklart exakt vad som menas. I påstående 5 kan man fråga sig "vadå x?" För vissa värden på x är påståendet sant och för andra är det falskt. Påstående nummer 6 är också problematiskt - vad menas med bäst, och bäst för vem?

Påståenden som antingen är sanna eller falska kallas för **utsagor**. Vi skriver S för sant och F för falskt. Utsagor utgör en viktig del inom programmering - här skriver man ofta *True/False* eller $0/1$ istället för sant/falskt.

Det kan vara bra att beteckna utsagor med variabelnamn. Om vi t.ex. skriver

$$P : 5 \text{ är mindre än } 8$$

så menar vi att P är utsagan. Här är P en *boolesk variabel* - nånting som kan vara sant eller falskt, i det här fallet sant. Ofta beror sanningsvärdet på en utsaga av någon variabel. Vi kan då skriva t.ex.

$$P(x) : x < 3$$

En sådan utsaga kallas för ett **predikat**. Här kan vi se P som en funktion av x. För varje givet värde av x får vi antingen ett sant eller falskt värde. Exempelvis är utsagan $P(0)$ sann medan $P(234.7)$ är falsk.

[1] Ett primtal är ett heltal > 1 som inte kan skrivas som en produkt av två mindre heltal.

Kombinationer av utsagor

Precis som $+$ är en operation som kombinerar två tal och ger ett tredje, så finns det operationer som kombinerar utsagor och ger nya utsagor.

Definition 1. Antag att P och Q är två utsagor. Då definierar vi även tre nya utsagor enligt följande:

- $P \wedge Q$ som uttalas "P och Q" är en utsaga som är sann när både P och Q är sanna, och falsk annars.
- $P \vee Q$ som uttalas "P eller Q" är en utsaga som är sann när minst en av P och Q är sanna, och falsk annars.
- $\neg P$ som uttalas "inte P" är en utsaga som har motsatt värde av P - den är sann när P är falsk och falsk när P är sann.

Anmärkning 1. Ett par saker att tänka på:

- För att minnas vilken som är vilken av $\wedge$ och $\vee$ kan man tänka att $\wedge$ liknar A som i engelska "And".
- "och" kallas inom logiken för *konjunktion*, "eller" kallas för *disjunktion*, och "inte" kallas *negation*.
- När man skriver "eller" inom matematik menar man alltid "inklusivt eller" om inget annat anges, utsagan "P eller Q" är alltså sann också när både P och Q är sanna.
- Inom programmering förekommer ibland även andra kombinationer av booleska variabler, t.ex. "*xor*" och "*nand*". Dessa kan dock skrivas genom att kombinera våra tre definierade operationer.

Istället för ord kan man beskriva operationer som $\wedge$, $\vee$, och $\neg$ med "sanningstabeller". Sanningstabellen för operatorerna "och", "eller", "inte" ser till exempel ut såhär:

P	Q	$P \wedge Q$
S	S	S
S	F	F
F	S	F
F	F	F

P	Q	$P \vee Q$
S	S	S
S	F	S
F	S	S
F	F	F

P	$\neg P$
S	F
F	S

Här betyder exempelvis näst sista raden i den vänstra tabellen med ord att "när P är falsk och Q är sann så är $P \wedge Q$ falsk". I en sanningstabell behöver man alltså en rad för varje kombination av Sant/Falskt för alla ingående variabler.

Man ska tänka på att operationerna $\wedge$ och $\vee$ tar *två* utsagor och ger en tredje. Vill man kombinera ihop fler utsagor kan det lätt bli fel - vad betyder t.ex. $P \wedge Q \vee R$ när (P,Q,R) =(Falsk,Sann,Sann)? Problemet är att $(P \wedge Q) \vee R$ är sann medan $P \wedge (Q \vee R)$ är falsk. Det är därför bäst att alltid sätta ut parenteser när man kombinerar många utsagor. Man kan dock lugnt skriva t.ex. $P \wedge Q \wedge R$ eftersom $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$, och samma sak gäller för $\vee$.

Precis som vi har lärt oss att man ska tolka $3 + 4 \cdot 5$ som $3 + (4 \cdot 5)$ så finns det även en prioriteringsregel för logiska operatorer: *Negationsoperatorn $\neg$ går först*. Om vi skriver $\neg P \wedge Q$ menar vi alltså $(\neg P) \wedge Q$.

Implikation och ekvivalens

Implikation

"Implikation" är ett annat sätt att kombinera två utsagor till en tredje. Implikation ($\Rightarrow$) definieras med följande sanningstabell[2]:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
S	S	S
S	F	F
F	S	S
F	F	S

Utsagan $P \Rightarrow Q$ kan i ord skrivas som "om P är sann så är Q sann", eller "P medför Q" eller "P implicerar Q", eller "Q om P" eller "P endast om Q".

Om exempelvis P och Q är utsagorna

$$P : \text{Det är söndag idag}$$
$$Q : \text{Universitetet är stängt idag}$$

Så beror ju sanningsvärdena för P och Q på vilken veckodag det är. Å andra sidan är utsagan $P \Rightarrow Q$ alltid sann: förutsatt att att det är söndag idag så är universitetet stängt idag.

Notera dock att vi inte har $Q \Rightarrow P$. Bara för att universitetet är stängt idag behöver det ju inte vara söndag! Det kan ju till exempel vara lördag idag. Eller så kan det vara en pågående pandemi.

Observera också att utsagan $P \Rightarrow Q$ alltså kan vara sann även när P är falsk - för att $P \Rightarrow Q$ ska vara falsk krävs att Q är falsk trots att P är sann.

Ett annat exempel är att utsagan $0 = 1 \Rightarrow$ "Jorden är platt" faktiskt är sann.

Ekvivalens

Utsagan $P \Leftrightarrow Q$ är sann precis när *båda* utsagorna $P \Rightarrow Q$ och $Q \Rightarrow P$ är sanna. Vi säger då att utsagorna P och Q är **ekvivalenta**. I vardagligt tal säger man att "P är sann om och endast om Q är sann". Rent konkret betyder $P \Leftrightarrow Q$ att utsagorna P och Q har exakt samma logiska innebörd.

Bevisföring och ekvivalens kontra likhet

Ett vanligt misstag som man ser på tentor är att likhetsteckenet $=$ blandas ihop med ekvivalenstecknet $\Leftrightarrow$.

Man ska komma ihåg att likhetstecknet är något som står mellan tal eller uttryck, som

$$2^{10} = 1024 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{4x+3}{2x-5} = 2 \qquad x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

[2]Ibland förekommer också notationen $\rightarrow$ för implikations-operatorn. Skillnaden mellan $\rightarrow$ och $\Rightarrow$ är en teoretisk detalj som inte är relevant i denna kurs.

medan implikation eller ekvivalenstecken är något som står mellan *påståenden eller utsagor*. Eftersom ekvationer och olikheter är utsagor så är det vanligt att se implikationer mellan dessa, vilket är helt korrekt, exempelvis

$$0 < x < \pi \;\Rightarrow\; \sin(x) > 0$$

vilket i ord kan läsas "Om x ligger mellan 0 och π så är $\sin(x)$ positivt"[3].

När man ska bevisa något är det ofta användbart att använda en *kedja av ekvivalenser*:

$$P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R \Leftrightarrow \cdots .$$

En sådan kedja ska vi tolka som $(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R) \wedge \cdots$. Om varje steg i kedjan är sant vet vi att vår sista utsaga har samma logiska innebörd som den ursprungliga utsagan.

Exempel 1. Säg att vi vill lösa ekvationen $x^3 = x$. Vi vill alltså hitta alla tal x som uppfyller ekvationen. Vi har:

$$\begin{aligned}
& x^3 = x \\
\iff\quad & x^3 - x = 0 \\
\iff\quad & x(x^2 - 1) = 0 \\
\iff\quad & x(x-1)(x+1) = 0 \\
\iff\quad & x = 0 \quad \vee \quad x = 1 \quad \vee \quad x = -1
\end{aligned}$$

I de första tre stegen har vi använt kända räknelagar och faktoriserat, och i det sista steget har vi använt att om en produkt är noll så är någon av faktorerna noll. Nu kan vi vara säkra på att vi har hittat alla lösningar eftersom den första raden är ekvivalent med den sista: att $x^3 = x$ är exakt samma sak som att x är $0, 1$, eller -1. △

Ibland vill man kanske genomföra ett steg där det bara gäller implikation och inte ekvivalens i en argumentation som i följande exempel:

Exempel 2. Säg att vi vill lösa ekvationen $\sqrt{x} + x = 0$, vi får

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x} + x = 0 \\
\iff\quad & \sqrt{x} = -x \\
\Rightarrow\quad & x = x^2 \\
\iff\quad & x^2 - x = 0 \\
\iff\quad & x(x-1) = 0 \\
\iff\quad & x = 0 \quad \vee \quad x = 1
\end{aligned}$$

När vi upphöjde båda sidor till 2 och gick från andra till tredje raden skrev vi implikation istället för ekvivalens, varför då? Jo om vi har två lika tal $a = b$ så följer det ju såklart att även $a^2 = b^2$. Men bara för att $a^2 = b^2$ kan vi inte dra slutsatsen att $a = b$, det kan ju också vara så att $a = -b$! Det gäller alltså för alla tal att $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ men $a^2 = b^2 \not\Rightarrow a = b$.

Av argumentet ovan följer alltså att $\sqrt{x} + x = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = 1$. Om x uppfyller ekvationen måste alltså x vara 0 eller 1. Men å andra sidan, bara för att x är 0 eller 1 behöver inte ekvationen vara uppfylld. Vi ser också om vi provar att stoppa in $x = 0$ och $x = 1$ i den övre ekvationen är det bara den första som verkligen löser ekvationen! Implikationen visar att det inte kan finnas några andra lösningar än 0 och 1, men för att se att dessa verkligen är lösningar måste vi sätta in dem och prova - detta är vanligt när man har en kedja som innehåller implikationer.

[3]Precis som i detta exempel ska kedjor av olikheter såsom $0 < x < \pi$ alltid tolkas som $0 < x \wedge x < \pi$.

Kvantorer

Det finns två vanliga operationer som kan användas för att omvandla ett predikat till en utsaga:

Definition 2. Antag att $P(x)$ är ett predikat som beror på ett tal x. Vi definierar då följande två utsagor:

- $\forall x : P(x)$ är utsagan som är sann om och endast om $P(x)$ är sann för alla tal x.
- $\exists x : P(x)$ är utsagan som är sann om och endast om det finns minst ett tal x så att $P(x)$ är sann.

I vanligt språk säger man t.ex. "för alla x har vi P(x)" respektive "det existerar x så att P(x) är sann". I matematiska texter förekommer det också att man skriver $\forall x$ efter ett predikat.

Två exempel på sanna utsagor är

$$\forall x : \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\exists x : x^2 = 5$$

En naturlig fråga kan vara "vad menas med alla?" Alla decimaltal? Alla heltal? Kan x vara en häst?

Om det inte framgår av sammanhanget kan man vara noga och skriva ut vilka x som menas:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Här betyder $\forall x \in \mathbb{R}$ "för alla x som tillhör mängden av reella tal", mer om mängder i nästa avsnitt.

Två exempel på falska utsagor är

$$\exists x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 2$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0.$$

Logik - Övningsuppgifter

1. Avgör vilka av följande utsagor som är sanna respektive falska.
   (a) $7 \cdot 8 = 56 \quad \vee \quad 8 \cdot 9 = 71$
   (b) $\neg(1 + 1 \geq 2 \ \wedge$ "Alla gillar kaffe")
   (c) ("Göteborg ligger i Sverige" $\vee$ 8537 är ett primtal) $\wedge \neg$"Solen snurrar runt Jorden"
   (d) $x > 5 \implies x > 0$
   (e) $x > 0 \implies x > 5$
   (f) $x^2 > 9 \implies x > 3$
   (g) $\forall x : x^2 + 4x + 1 > 0$
   (h) $\exists x : x^3 = x^5$

2. Vi definierar utsagan P *xor* Q som sann om antingen P eller Q är sanna, men inte båda två.
   (a) Skriv ned en sanningstabell för *xor*.
   (b) Hitta ett uttryck som är ekvivalent med P *xor* Q genom att bara använda parenteser och symbolerna $P, Q, \neg, \wedge, \vee$.

3. Skriv ned en sanningstabell för $(P \vee \neg Q) \wedge (R \Rightarrow P)$. Du kommer att behöva 8 rader, en för varje kombination av sanningsvärden för P, Q, och R!
   tips: Det kan hjälpa att skriva ned sanningsvärdena för $P \vee \neg Q$ respektive $R \Rightarrow P$ som två extra kolonner i tabellen!

4. $\neg Q \Rightarrow \neg P$ kallas den *kontrapositiva* utsagan till $P \Rightarrow Q$. Formulera i ord den kontrapositiva utsagan till "Om det är söndag idag så är universitetet stängt".
   Skriv också ned en sanningstabell för $\neg Q \Rightarrow \neg P$ och jämför den med sanningstabellen för $P \Rightarrow Q$ i texten ovan. Vilken slutsats kan du dra?

5. På en skylt vid en karusell på Liseberg står det "Välkommen om du är äldre än 11 år och längre 130cm eller om du har sällskap med en förälder".
   (a) Vi inför utsagorna

   P : Du är välkommen
   Q : Du är äldre än 11 år
   R : Du är längre än 130cm
   U : Du har sällskap med en förälder

   Uttryck vad skylten försöker säga med endast P, Q, R, U och logiska symboler.
   (b) Finns det någon otydlighet i budskapet? Hur skulle du skrivit om texten så att även en strikt logiker hade förstått exakt vad som menas?

6. Betrakta följande fyra utsagor

$$P : x = 2$$
$$Q : x < 5$$
$$R : x^2 = 4$$
$$U : |x| = 2.$$

   Vilka implikationer och ekvivalenser mellan de olika utsagorna är sanna? (kom ihåg att absolutbeloppet av ett tal är talet utan sitt eventuella minustecken)

7. Uttryck var och en av utsagorna $\forall x : (\exists y : y > x)$ respektive $\exists y : (\forall x : y > x)$ med ord. Logiskt sett är utsagorna är faktiskt olika - endast en av dem är sann! Vilken av dem? Movivera ditt svar!

8. $\star$ Vilka av utsagorna $(\exists x : x > 5) \wedge (\exists x : x < 3)$ respektive $\exists x : (x > 5 \ \wedge \ x < 3)$ är sanna? Vilken slutsats kan man dra av detta exempel?

9. $\star$ Följande resonemang tycks visa att $1 = 2$. Varför är beviset felaktigt? Vilka ekvivalenspilar är felaktiga?

	$a = b$	starta med två lika tal a och b
$\iff$	$a^2 = ab$	vi multiplicerar båda led med a
$\iff$	$2a^2 = a^2 + ab$	vi adderar a^2 till bägge sidor
$\iff$	$2a^2 - 2ab = a^2 - ab$	vi subtraherar $2ab$ från bägge sidor
$\iff$	$2(a^2 - ab) = a^2 - ab$	vi faktoriserar vänsterledet
$\iff$	$2 = 1$	vi dividerar bägge led med $(a^2 - ab)$

10. $\star\star$ *nand* står för "not and". Vi definierar P *nand* Q som $\neg(P \wedge Q)$.

    (a) Skriv ned en sanningstabell för *nand*.

    (b) Visa att var och en av de tre utsagorna $P \wedge Q$, och $P \vee Q$, och $\neg P$ kan skrivas med hjälp av endast parenteser, P, Q, och *nand*.

Del II

Mängder

Grundläggande operationer på mängder

Intuitivt kan man säga att en mängd är en samlig av olika[4] objekt. Objekten som ingår i mängden kallas för mängdens **element**. Man skriver $x \in M$ om x är ett element i mängden M. Tecknet $\in$ kan utläsas "tillhör". Om x inte tillhör M kan man skriva $x \notin M$. Om vi skriver $x, y \in M$ menar vi att $x \in M$ och $y \in M$. Här är fyra exempel på mängder:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{\pi, \sqrt{2}, e\}$$
$$C = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$
$$D = \{\text{Mängden av alla primtal}\}$$

De två mängderna A och B ovan har 5 respektive 3 element och vi har definierat dem genom att lista alla deras element inom mängd-klamrar. Mängden C är inte lika tydligt definierad, men av sammanhanget ska man förstå att C består av alla positiva jämna tal. Mängden P beskriver vi med ord, och här krävs det alltså att man förstår innebörden av ordet primtal.

Man kan även definiera mängder med hjälp av villkor, t.ex. kan vi beskriva mängden av alla udda heltal som

$$U = \{2n + 1 \mid n \text{ är ett heltal}\}.$$

Detta kallas "mängdbyggarnotation". Här består mängden av alla tal på formen till vänster så att villkoret till höger är uppfyllt. Mängden U har oändligt många element.

Inom matematik används ofta följande symboler för olika mängder av tal[5]

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	Naturliga tal
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	Heltal
$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0\}$	Rationella tal
$\mathbb{R} =$ alla decimaltal	Reella tal
$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$	Komplexa tal

De flesta mängder vi stöter på inom matematik består av tal, men i praktiken kan en mängd bestå av vilken typ av objekt som helst, till och med andra mängder!

Låt till exempel

$$F = \left\{ \text{}, \text{}, \text{}, \text{} \right\} \qquad T = \left\{\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\right\}.$$

Här är F en mängd frukter medan T består av tre talmängder. Observera att T har tre element, även om var och en av dessa i sig är mängder med oändligt många element. Notera också att exempelvis talet 1 inte är ett element i T, mängden T har bara tre element.

Nu ska vi titta på lite användbar notation för mängder.

[4] Mängder kan alltså inte innehålla kopior av samma element. Ordningen av elementen spelar heller ingen roll.

[5] I vissa böcker väljer man att nollan inte ska ingå i de naturliga talen.
I de reella talen $\mathbb{R}$ ingår även tal med oändlig decimalutveckling som t.ex. $1/3$ och π.

Definition 3. Låt A och B vara två mängder. Vi skriver då

1. $A \subset B$ om varje element i A också ligger i B. Vi säger då att A är en **delmängd**[6] av B. Med logiska symboler från förra avsnittet kan detta skrivas $x \in A \Rightarrow x \in B$.
2. $A \cup B$ för mängden av element som ligger i antingen A eller B (eller båda!). $A \cup B$ kallas för **unionen** av A och B. Med logiska symboler har vi
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \vee \quad x \in B\}.$$
3. $A \cap B$ för mängden av element som ligger i både A och B. $A \cap B$ kallas för **snittet** av A och B. Med logiska symboler har vi
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \wedge \quad x \in B\}.$$
4. $A \backslash B$ för **mängddifferensen** av A och B, mängden av element som ligger i A men inte i B. Med logiska symboler har vi
$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\}.$$
5. Vi skriver $|A|$ för antalet element i A. Detta kallas för mängdens **kardinalitet.**[7]
6. Vi skriver också $\varnothing$ för **den tomma mängden**. Denna innehåller *inga* element.

Exempel 3. Låt $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Då har vi

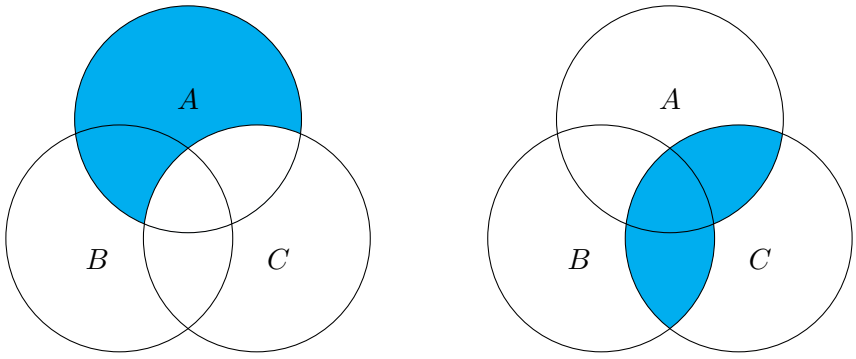
$$\text{Utsagan } A \subset B \text{ är falsk} \qquad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$A \cap B = \{4, 5\} \qquad A \backslash B = \{1, 2, 3\} \qquad |A| = 5.$$

Anmärkning 2. Notera att enligt vår definition får vi $A \subset A$ för alla mängder A. På samma vis gäller också $\varnothing \subset A$ för alla mängder A.

Venndiagram

För att illustrera mängder kan man rita Venndiagram. Här illustrerar man mängderna som områden i en bild - även om inte mängderna består av bildens punkter så kan diagrammen ge insikt om hur olika mängder kan skära varandra.

Nedan har vi ritat två Venndiagram som illustrerar tre mängder A, B, och C.



I den vänstra bilden har vi färgat mängden $A \backslash C$ och i den högra har vi färgat mängden $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

[6] Det är lätt att blanda ihop symbolerna $\in$ och $\subset$. Tänk på att $\in$ står mellan ett element och en mängd medan $\subset$ står mellan två mängder.

[7] För en ändlig mängd är kardinaliteten ett heltal. För oändliga mängder blir det mer spännande - det finns olika höga grader av oändligheter!

Produktmängd och potensmängd

Definition 4. Om A och B är två mängder definierar vi mängden

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

Denna mänbd kallas **produktmängden** av A och B och består som vi ser av alla ordnade par (a, b) där a ligger i A och b i B.

Om A har m element och B har n element så finns det $m \cdot n$ stycken element i mängden $A \times B$.

Exempel 4. Om $A = \{a, b, c\}$ och $B = \{3, 5\}$ så har vi exempelvis

$$A{\times}B = \{(a,3),(a,5),(b,3),(b,5),(c,3),(c,5)\} \quad \text{och} \quad B{\times}B = \{(3,3),(3,5),(5,3),(5,5)\}$$

När man tar produkten av en mängd med sig själv så används vanligtvis potensnotation, t.ex.

$$A^2 = A \times A \quad \text{och} \quad A^5 = A \times A \times A \times A \times A.$$

Här består alltså A^5 av alla 5-tuplar av element i A.

Definition 5. Om A är en mängd definierar vi **potensmängden** av A som mängden

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}.$$

$\mathcal{P}(A)$ är alltså *mängden av alla delmängder till* A.

Exempel 5. Låt $A = \{1, 2, 3\}$. Då har vi

$$\mathcal{P}(A) = \big\{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1\},\{2\},\{3\},\varnothing\big\}.$$

Notera att vi hade $|A| = 3$ och $|\mathcal{P}(A)| = 8$ i exemplet ovan. För att skapa en delmängd av A ska vi för vart och ett av de tre elementen välja om det ska tillhöra delmängden eller ej, vi har alltså två val för varje element och därför 2^3 delmängder. Mer allmänt: om A har n element så gäller att $\mathcal{P}(A)$ har 2^n element.

Unioner och snitt av flera mängder

Om vi har ett antal mängder A_1, A_2, A_3, A_4 så kan vi skapa unionen $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Denna mängd innehåller alltså de x som ligger i minst en av de fyra mängderna. När vi tar unionen av flera mängder kan vi använda *unionsoperatorn* för att det ska bli mer kortfattat. Unionen av de fyra mängderna ovan kan på detta vis skrivas

$$\bigcup_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4.$$

Detta kan läsas som "unionen av A_i när i går från 1 till 4". Här är i bara en index-variabel, den hade lika gärna kunnat heta något annat, t.ex. j eller k. På liknande vis skriver vi

$$\bigcap_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$$

för snittet av de fyra mängderna.

Mer generellt: Om $A_1, A_2, \ldots, A_n$ är mängder så definierar vi

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \text{mängden element som tillhör minst en av } A_i$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cup A_n = \text{mängden element som tillhör alla } A_i$$

Notationen fungerar också för att ta snittet av ett oändligt antal mängder. Om $A_1, A_2, \ldots$ alla är mängder skriver vi exempelvis $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ för unionen av *alla* A_i - den innehåller alla element som tillhör någon av de oändligt många A_i.

Exempel 6. Beteckna $A_i = \{i, i+2, i+4\}$ för varje heltal i. Då har vi t.ex.

$$\bigcup_{i=0}^{2} A_i = \{0,2,4\} \cup \{1,3,5\} \cup \{2,4,6\} = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

$$\bigcap_{i=0}^{2} A_{2i} = \{0,2,4\} \cap \{2,4,6\} \cap \{4,6,8\} = \{4\}$$

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \mathbb{N} \qquad \text{och} \qquad \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \varnothing$$

Intervall - sammanhängande delmängder till $\mathbb{R}$

Eftersom man inom matematik ofta arbetar med reella tal förekommer följande notation för dess sammanhängande delmängder:

Definition 6. Låt a och b vara reella tal med $b \geq a$. Då definierar vi följande **intervall**:

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\ \} \\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.
\end{aligned}$$

Hak-parentes betyder alltså att motsvarande ändpunkt ingår i mängden medan vanlig parentes betyder att ändpunkten inte tillhör intervallet. Vi kallar intervall av formen $[a,b]$ för **slutna** och (a,b) för **öppna**. De övriga kallas halvöppna. Vi säger att **längden** av alla intervall ovan är $b-a$. Man kan också skriva intervall av formen

$$(-\infty, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}.$$

Ett sådant intervall kallas **obegränsat**. Observera att ∞ inte är ett reellt tal, här ser vi det bara som en symbol som används för att beskriva oändligt långa intervall.

Mängder - Övningsuppgifter

1. Vilka av följande utsagor är sanna?

   (a) $\{3, 7, 8\} \in \mathbb{Z}$

   (b) $\pi \subset \mathbb{R}$

   (c) $5 + \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

   (d) $\{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N}$

2. Skriv om var och en av följande mängder på ett så enkelt sätt som möjligt.

   (a) $(\{x, y, z\} \cup \{z, w, x\}) \cap \{y, z, v, w\}$

   (b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

   (c) $\{\sqrt{2}, 3, 5, -7, \pi, 0\} \backslash \mathbb{N}$

   (d) $\{(-1)^k \mid k \in \mathbb{N}\}$

   (e) $\star$ $\{y^2 \mid y \in [-1, 3)\}$

   (f) $\star$ $\{a \in \mathbb{R} \mid |a - 5| < 2\}$

   (g) $\star\star$ $M \backslash \{x \cdot y \mid x, y \in M\}$ där $M = \{2, 3, 4, 5, 6, ...\}$.

3. Mängden udda tal kunde ju skrivas mer explicit som $\{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ i mängdbyggarnotation. Skriv var och en av följande mängder med hjälp av mängdbyggarnotation:

   (a) Mängden jämna tal

   (b) Mängden av tal som har resten 3 när de divideras med 4

   (c) Mängden av tal som kan fås genom att dubbla talet 1 ett antal gånger

   (d) Mängden av slutna intervall av längd 3

   (e) $\star$ Mängden öppna intervall vars mittpunkt är ett heltal och vars längd är π

4. Rita följande mängder i Venndiagram. Är några av mängderna lika?

   (a) $(A \cup B) \cap C$

   (b) $A \cup (B \cap C)$

   (c) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

5. Om A och B är två mängder så skriver vi $A \Delta B$ för den *symmetriska skillnaden* mellan A och B, detta är mängden av alla element som ligger antingen i A eller B men inte i båda.

   (a) Rita mängden $A \Delta B$ i ett Venndiagram.

   (b) Skriv mängden $A \Delta B$ med hjälp av endast parenteser och symbolerna $A, B, \cup, \cap, \backslash$.

   (c) Beskriv mängden med hjälp av logiska operationer: $A \Delta B = \{x \mid \ldots\}$.

6. Låt $A = [-2, \pi)$ och $B = (0, \sqrt{2}]$ och $C = [2, \infty)$. Skriv följande mängder som ett intervall eller som en union av intervall:

   (a) $A \cup B$

   (b) $A \cap B$

   (c) $A \backslash B$

(d) $B \cap C$

(e) $A \cup C$

7. Ge ett par exempel på element som tillhör mängden $\mathbb{Q} \times \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

8. Låt $A = \{0, 1\}$ och $B = \{a, b, c\}$. Ange *hur många* element följande mängder har. Du behöver inte lista alla element!

   (a) $A \cup B$

   (b) $A \cap B$

   (c) $A \backslash B$

   (d) $A \times B$

   (e) $A \times \mathcal{P}(B)$

   (f) $\star$ $\mathcal{P}(A) \cap A$

   (g) $\star$ $\mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$

9. $\star$ Skriv ned alla element i följande mängd:

$$\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0 \ \wedge \ x + y \leq 3\}.$$

   Hur många element blev det? Fundera på om man kan visualisera mängden på något vis.

10. $\star\star$ På en matteuppgift har två studenter försökt hitta alla talpar (x, y) som löser båda av följande ekvationer samtidigt:

$$\begin{cases} x - 2y &= 1 \\ 6y - 3x &= -3 \end{cases}$$

    Den första studenten har kommit fram till att mängden av alla lösningar (x, y) kan skrivas $\{(1 + 2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Den andra studenten har kommit fram till att lösningsmängden är $\{(3 - 2t, 1 - t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Vem har rätt?

Del III

Funktioner

Funktioner

En funktion består av tre delar: en **definitionsmängd** D, en **målmängd** M, och en **regel** som för varje element i D ger ett entydigt element i M. Denna data kan sammanfattas som:

$$f : D \to M \qquad x \mapsto f(x),$$

alltså "f är en funktion från D till M som omvandlar x till $f(x)$".

Inom envariabelsanalys har de flesta funktionerna formen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; de tar ett reellt tal och omvandlar det till ett annat reellt tal. Till exempel har vi funktionen som kvadrerar tal

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f : x \mapsto x^2.$$

Regeln $x \mapsto x^2$ skrivs kanske vanligare som $f(x) = x^2$. I ord säger man t.ex. att "f av x är x^2" eller att "f *avbildar* x på x^2". Notera att namnet på variabeln x i regeln är irrelevant, hade vi skrivit $f(y) = y^2$ istället så har vi samma funktion - regeln säger bara att man ska kvadrera vad som än stoppas in i funktionen.

Inom linjär algebra och flervariabelanalys studerar man främst funktioner av typen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, alltså funktioner som tar n stycken reella tal som indata och producerar m stycken reella tal.

Ett exempel är funktionen

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad g(x, y) = (x^2 + y, x - y, e^x).$$

Här har vi till exempel $g(0, 1) = (1, -1, 1)$.

Reglerna som säger hur vi beräknar funktionsvärdena i funktionerna ovan tar formen av algebraiska uttryck, men så behöver det inte vara. Det räcker att regeln på ett entydigt sätt säger vad funktionsvärdet är. Ta t.ex. funktionen

$$F : \{\text{Mängden av alla djur}\} \to \mathbb{N} \qquad F(x) = \text{antal ben som } x \text{ har.}$$

Detta är en helt vanlig funktion [8], vi har t.ex.

$$F(\text{katt}) = 4 \qquad F(\text{spindel}) = 8 \qquad F(\text{orm}) = 0.$$

Om definitionsmängden till en funktion är ändlig är det ibland lättast att beskriva alla funktionens värden. Vi har t.ex. en funktion

$$G : \{\text{🍏}, \text{🍌}, \text{🍊}, \text{🍉}\} \to \{\text{🐯}, \text{🐰}, \text{🐍}\}$$

$$G(\text{🍏}) = \text{🐍} \qquad G(\text{🍌}) = \text{🐯} \qquad G(\text{🍊}) = \text{🐯} \qquad G(\text{🍉}) = \text{🐰}$$

[8] Här kan man i och för sig fråga sig exakt vad definitionen av "djur" och "ben" är, men om vi antar att vi är överens om dessa begrepp så är funktionen väldefinierad.

Det är också vanligt att se styckvis definierade funktioner, exempelvis funktionen $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som definieras enligt följande:

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{när } x < 0 \\ x^2 & \text{när } 0 \leq x < 2 \\ 1 - x & \text{när } x \geq 2. \end{cases}$$

Här är s en helt vanlig funktion (och inte tre funktioner), för varje x har vi berättat entydigt vad $s(x)$ är. Vi har t.ex. $s(\sqrt{3}) = 3$ och $s(-3) = 1$ och $s(2) = -1$.

Ett annat exempel är funktionen $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definierad av

$$q(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}.$$

Denna funktion "hoppar mellan 0 och 1 hela tiden". Vi har t.ex. $q(\frac{22}{7}) = 1$ och $q(\pi) = 0$ och $q(3.1415) = 1$.

För varje mängd A finns det en motsvarande **identitetsfunktion** som skrivs $\mathrm{id}_A : A \to A$. Denna avbildar varje element på sig själv, alltså $\mathrm{id}_A(x) = x$ för varje $x \in A$.

Vad betyder väldefinierad?

Vi har använt ordet "väldefinierad" ett par gånger i förra stycket. Vad betyder det? Här ovan menar vi att *f verkligen är en funktion*. När man försöker beskriva en funktion matematiskt är det lätt att göra olika misstag så att man inte får en funktion. Här är ett par exempel:

1. Låt $h : \{1, 2, 3\} \to \{a, b\}$ vara funktionen som uppfyller $h(1) = b$ och $h(2) = a$.
2. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$.
3. Låt $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara funktionen som uppfyller $g(x)^2 = e^x$.
4. Låt $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{om } 0 \leq x \leq 3 \\ 5 - x & \text{om } x \geq 3. \end{cases}$.

Definitionen i (1) ger ingen väldefinierad funktion från mängden $\{1, 2, 3\}$ till $\{a, b\}$. Vi har ju inte berättat vad $h(3)$ är!

Samma problem förekommer mer kamoflerat i (2) då f inte är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$: vad är $f(3)$? Problemet kan åtgärdas genom att bestämma att $f(3) = 75$ (exempelvis), eller kanske vanligare genom att säga att ändra definitionsmängden för f till $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, alltså så att definitionsmängden består av alla tal utom 3.

Funktionen i (3) är heller inte väldefinierad. Problemet är att det finns massor med funktioner som uppfyller villkoret. Vad är t.ex. $g(0)$? Både 1 och -1 uppfyller villkoret så det är otydligt vilket värde $g(0)$ ska tydas som. För att få en väldefinierad funktion hade man kunnat skriva t.ex. $g(x) = \sqrt{e^x}$ istället.

I (4) är funktionen inte heller väldefinierad. Dels är funktionen odefinierad för $x < 0$ trots att vi skrev att definitionsmängden var $\mathbb{R}$. Dels är det oklart vad är $k(3)$ är - både villkoren är ju uppfyllda då $x = 3$ så det är oklart om $k(3)$ ska vara 9 eller 2.

Injektivitet och surjektivitet

En funktion $f : A \to B$ kallas **injektiv** när $f(x) = f(y)$ endast när $x = y$. Detta är ekvivalent med att säga att $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, det vill säga att olika element i A avbildas på olika element i B. Funktionen G ovan är till exempel *inte* injektiv, eftersom både 🍌 och 🍊 avbildas på samma element. Man kan tänka sig att en injektiv funktion f "stoppar in" eller "injicerar" mängden A i mängden B, därav namnet injektiv.

En funktion $f : A \to B$ kallas **surjektiv** om $\{f(x) \mid x \in A\} = B$, det vill säga varje element i målmängden B är en bild av något (eller några) element i definitionsmängden A. Mängden $\{f(x) | x \in A\}$ kallas **värdemängden** till f och är alltid en delmängd i målmängden. Av funktionerna i avsnittets början är G surjektiv men inte F. "Sur" betyder "på" så man kan komma ihåg att en surjektiv funktion avbildar definitionsmängden "på hela målmängden".

En funktion $f : A \to B$ kallas **bijektiv** om f är både injektiv och surjektiv. Detta betyder att f precis parar ihop alla element i A med alla element i B. Prefixet "Bi" betyder två, så man kan komma ihåg innebörden genom att tänka att en bijektiv funktion har "båda två" av egenskaperna injektiv och surjektiv.

Kombinationer av funktioner

Antag att A,B, och C är tre mängder och att $f : A \to B$ och $g : B \to C$ är två funktioner. Då kan vi skapa funktionernas **sammansättning**[9] $g \circ f : A \to C$. Denna nya funktion $g \circ f$ definieras av $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ för varje $x \in A$. Notera att funktionen som står till höger - f i det här fallet - är den funktionen man först stoppar in x i.

Exempel 7. Låt $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$ och $C = \{a, b, c, d\}$.
Låt sedan $f : A \to B$ ges av

$$f(1) = \heartsuit, \quad f(2) = \clubsuit \quad f(3) = \diamondsuit$$

och låt $g : B \to C$ ges av

$$g(\clubsuit) = c, \quad g(\spadesuit) = a, \quad g(\heartsuit) = a, \quad g(\diamondsuit) = d$$

Då ges funktionen $g \circ f$ av

$$(g \circ f)(1) = a \quad (g \circ f)(2) = c \quad (g \circ f)(3) = d$$

Notera att vi inte kan skapa sammansättningarna $f \circ g$ eller $f \circ f$ eller $g \circ g$ eftersom mängderna inte stämmer överens, testa och se vad som händer!

Inversen till en funktion

En **invers** till en funktion $f : A \to B$ är en annan funktion $g : B \to A$ så att

$$g(f(a)) = a \text{ och } f(g(b)) = b \text{ för alla } a \in A \text{ och } b \in B.$$

Detta kan också skrivas

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \text{ och } f \circ g = \mathrm{id}_B.$$

När detta är fallet skriver vi $g = f^{-1}$ och $f = g^{-1}$ och säger att f och g är varandras *inverser*. En funktion $f : A \to B$ har en **invers** om och endast om f är bijektiv.

[9] Egentligen räcker det att f's värdemängd är en delmängd av g's definitionsmängd.

Exempel 8. Låt $f : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ där $f(a) = 2$, $f(b) = 3$, och $f(c) = 1$. Funktionen f är då bijektiv. Inversen till f ges av

$$f^{-1} : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\} \text{ där } f^{-1}(1) = c,\ f^{-1}(2) = a,\ f^{-1}(3) = b.$$

Exempel 9. Inversen till $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $g(x) = 3x + 5$ är funktionen $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $g^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}$. Detta kan verifieras genom att beräkna

$$(g \circ g^{-1})(x) = g(\frac{x-5}{3}) = 3\frac{x-5}{3} + 5 = x$$

och

$$(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}(3x + 5) = \frac{(3x + 5) - 5}{3} = x.$$

Grafen till en funktion

Man tänker ofta på grafen till en funktion som en kurva i xy-planet, men den mer allmämna definitionen är följande:

Definition 7. Grafen till en funktion $f : A \to B$ är mängden

$$\{(a, f(a)) \mid a \in A\}.$$

Grafen till $f : A \to B$ är alltså en viss *delmängd av produktmängden* $A \times B$.

Exempel 10. Kom ihåg funktionen G från frukter till djur ovan. Dess graf är mängden

$$\Big\{\big(🍏, 🐍\big), \big(🍌, 🐯\big), \big(🍊, 🐯\big), \big(🍉, 🐇\big)\Big\}.$$

Exempel 11. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $f(x) = x^2$. Då blir dess graf mängden

$$\{(0, 0), (0.4, 0.16), (-3, 9), (\sqrt{3}, 3), \ldots \qquad \text{och oändligt många fler talpar.}\}$$

Om man i ett koordinatsystem sätter en prick vid varje (x, y) som ingår i denna oändliga mängd får man den välbekanta kurvan för grafen.

Funktioner - Övningsuppgifter

1. Låt funktionerna $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av

$$f(x) = 2x + 3 \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = 2^x$$

   Förenkla följande uttryck så långt som möjligt:

   (a) $f(3y + 1)$
   (b) $f(g(x))$
   (c) $g(f(x))$
   (d) $h(g(2) \cdot f(-1) - h(1))$

2. Vilka av funktionerna f, g, h från föregående uppgift är injektiva? surjektiva? bijektiva?

3. Regeln $f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{x-4}$ ger inte en väldefinierad funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$, varför? Hur ska man välja en så stor som möjligt definitionsmängd D för f så att $f : D \to \mathbb{R}$ blir en väldefinierad funktion?

4. Låt

$$A = \{ \text{🍏}, \text{🍌}, \text{🍉} \} \quad \text{och} \quad B = \{ \text{🐯}, \text{🐰} \}$$

   För varje deluppgift (a)-(d) nedan, ge ett exempel på en funktion $f : A \to B$ som uppfyller villkoret eller förklara varför det inte finns någon sådan funktion!

   (a) Injektiv funktion
   (b) Surjektiv funktion
   (c) Bijektiv funktion
   (d) Funktion som varken är injektiv eller surjektiv
   (e) Besvara frågorna ovan igen fast för funktioner $g : B \to A$.

5. Vi definierar funktionen $g : [0, 5] \to \mathbb{R}$ enligt följande:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{när } 0 \leq x \leq 2 \\ 6 - x^2 & \text{när } 2 < x \leq 3 \\ \sqrt{x} & \text{när } 3 < x \leq 5. \end{cases}$$

   (a) Beräkna $g(1)$ och $g(9)$ och $g(4)$ och $g(\sqrt{5})$.
   (b) Beräkna $g(g(\pi))$
   (c) ⋆⋆ Vad är värdemängden till g? Svara med ett intervall eller en union av intervall.

6. Hitta inverserna till följande funktioner:

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $f(x) = 7 - 2x$
   (b) $g : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ där $g(1) = b$, $g(2) = c$, $g(3) = a$
   (c) $h : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ där $h(0) = 1$ och $h(1) = 0$.

7. ⋆ Välj i varje deluppgift en definitionsmängd D och en målmängd M så att regeln $x \mapsto x^2$ ger en funktion som blir:

(a) Injektiv men inte surjektiv

(b) Surjektiv men inte injektiv

(c) Bijektiv

8. $\star$ Ge ett exempel på en funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ som är injektiv men inte surjektiv.

9. $\star\star$ Låt $g : [0, 7] \to [1, 6]$ definieras av

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x} & \text{när } 0 \leq x < 4 \\ x - 1 & \text{när } 4 \leq x \leq 7. \end{cases}$$

Hitta inversen till g!

Del IV

Summor

Summasymbolen Σ

Om vi vill skriva summan av de 10 första udda talen kan vi skriva

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19.$$

För att uttrycka denna summa på ett mer kompakt sätt (utan att skriva ut det faktiska värdet) kan man använda såkallad summa-notation. Det ser ut så här:

$$\sum_{i=1}^{10}(2i - 1).$$

Summasymbolen Σ är den grekiska bokstaven stora sigma. Till höger står ett uttryck som beror på vår index-variabel i, nedanför Σ står heltalet som i börjar på, och ovanför står värdet som i slutar på. I exemplet ovan utvärderar vi alltså uttrycket för alla heltal $1 \leq i \leq 10$ och tar summan av dessa. Vilken bokstav vi använder som index-variabel påverkar ej summan. Vill man vara tydlig är det bra att sätta ut parenteser: exempelvis är ju summorna $\sum_{i=1}^{10}(2i - 1)$ och $(\sum_{i=1}^{10} 2i) - 1$ olika!

Vi kan nu formulera en mer allmän definition av summa-symbolen:

Definition 8. Låt a och b vara heltal med $b \geq a$, och låt s_i vara ett tal för varje heltal i mellan a och b. Då definierar vi

$$\sum_{i=a}^{b} s_i = s_a + s_{a+1} + s_{a+2} + \cdots + s_b.$$

Ofta är s_i i definitionen någon funktion av i.

Exempel 12. Vi har

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

$$\sum_{j=0}^{3} \frac{j}{j+1} = \frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{0+6+8+9}{12} = \frac{23}{12}$$

$$\sum_{i=0}^{5}(-1)^i = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

$$\sum_{i=0}^{5} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 \qquad \leftarrow 6 \text{ termer då } i \text{ går från } 0 \text{ till } 5$$

Räkneregler för summor

Låt s_i respektive t_i vara termer som beror på heltal i. Då gäller

$$\sum_{i=a}^{b}(s_i + t_i) = \sum_{i=a}^{b} s_i + \sum_{i=a}^{b} t_i.$$

Om λ är ett tal som inte beror på i så gäller också

$$\sum_{i=a}^{b} \lambda s_i = \lambda \sum_{i=a}^{b} s_i.$$

Man kan också bryta upp summans intervall i två bitar: för varje heltal c mellan a och b så kan vi skriva

$$\sum_{i=a}^{b} s_i = \sum_{i=a}^{c} s_i + \sum_{i=c+1}^{b} s_i.$$

Summor över mängder

I exemplen ovan summerar man när en index-variabel rör sig över ett heltalsintervall. En annan notation som ofta dyker upp är summor över mängder. Om vi exempelvis har en mängd $A = \{-1, 0, 1, \pi, \sqrt{3}\}$ så kan vi använda notationen

$$\sum_{x \in A} x^2 = 1 + 0 + 1 + \pi^2 + 3 = 5 + \pi^2.$$

Här betyder notationen att vi ska ta summan av uttrycket x^2 för varje x i mängden A.

Dubbelsummor

En dubbelsumma är precis vad det låter som, en summa av summor! Vi vet egentligen redan hur man beräknar en sådan summa - enda skillnaden är att termerna nu kan bero på två olika variabler. Vi demonstrerar med ett exempel:

$$\sum_{j=1}^{4} \sum_{k=0}^{2} (j \cdot k - k^2 + j) = \sum_{j=1}^{4} (j) + (j - 1 + j) + (2j - 4 + j) = \sum_{j=1}^{4} 6j - 5 = 1 + 7 + 13 + 19 = 40.$$

I första steget summerade vi för $k = 0, 1, 2$ och fick då termer som bara beror på j. Sedan förenklade vi detta uttryck, och till slut summerar vi för $j = 1, 2, 3, 4$ och skriver ned resultatet.

Produktnotation

Ibland behöver man notation för att kunna skriva ned produkter av många faktorer. Då kan man använda produkt-notation. Vi skriver då Π (stora pi) istället för Σ - annars fungerar notationen på samma vis förutom att man nu tar produkten av uttrycken istället för summan. Exempelvis:

$$\prod_{k=2}^{6} \sqrt{k} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{6} = 12\sqrt{5}$$

$$\prod_{x \in \{0,2,4,9\}} (x + 1) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10 = 150$$

Aritmetisk och geometrisk summa

Aritmetisk summa

Det finns två typer av summor som är bra att känna till. I en **aritmetisk summa** är skillnaden mellan efterföljande termer samma, t.ex.

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 \quad \text{eller} \quad (-7)+(-2)+3+8+12+17$$

Man kan enkelt beräkna en aritmetisk summa genom att para ihop termerna framifrån och bakifrån:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = (1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6) = 5\cdot 11 = 55.$$

Eftersom varje parentes blir 11 och det finns 5 par blir summan alltså 55.

Den allmänna formen för aritmetisk summa kan på samma sätt visas bli:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \tfrac{n}{2}(s_1 + s_n)$$

Detta samband gäller alltså i aritmetiska summor där $s_{i+1} - s_i$ är konstant. Som en minnesregel är summan "första termen plus sista termen gånger antalet termer delat med två".

Exempel 13. Vi ska beräkna summan $s = 16 + 19 + 22 + 25 + 28 + 31 + 34 + 37 + 40$. Summan är aritmetisk eftersom skillnaden mellan efterföljande termer alltid är 3. Enligt formeln har vi $s = \frac{9(16+40)}{2} = 252$.

Exempel 14. Vi ska beräkna summan $\sum_{k=-3}^{4}(2k+5)$. Summan är aritmetisk eftersom skillnaden mellan två efterföljande termer är 2. (Detta kan vi se om vi inför $a_k = 2k+5$ för termerna och beräknar $a_{k+1} - a_k = 2(k+1)+5-(2k+5) = 2$.) För att få första respektive sista termen tar vi $k = -3$ respektive $k = 4$. Vi ser att antalet termer är 8 (k startar på -3 och slutar på 4). Formeln ger alltså:

$$\sum_{k=-3}^{4}(2k+5) = (2(-3)+5+2(4)+5)\cdot\frac{8}{2} = 12\cdot 4 = 48.$$

Geometrisk summa

Den andra typen av summa är den **geometriska summan**. I sådana är *kvoten* mellan efterföljande termer konstant. Här är två exempel:

$$1+3+9+27+81+243 \quad \text{och} \quad \sum_{k=3}^{6} 5^k.$$

Eftersom kvoten mellan efterföljande termer är konstant har varje geometrisk summa formen $\sum_{k=a}^{b} \lambda q^k$ där q är ett tal (kvoten i den geometriska summan), a respektive b är några gränser, och λ är en konstant som kan faktoriseras ut ur summan. Motsvarande formel för beräkning av geometrisk en summa är:

$$q^a + q^{a+1} + \cdots + q^b = \sum_{k=a}^{b} q^k = \frac{q^{b+1} - q^a}{q-1}$$

Vi gör ett kort bevis av formeln - själv tycker jag det är lättare att komma ihåg beviset än formeln!

Bevis. Låt $s = q^a + \cdots + q^b$ beteckna summan. Då har vi $q \cdot s = q^{a+1} + \cdots + q^{b+1}$, så $qs - s = q^{b+1} - q^a$ eftersom alla mellanliggande termer stryks mot varandra. Alltså har vi $s(q-1) = q^{b+1} - q^a$ och division med $q-1$ ger alltså $s = \frac{q^{b+1}-q^a}{q-1}$ vilket var det vi skulle bevisa. □

Speciellt enkel blir formeln då $a = 0$, alltså när första termen är 1.

Exempel 15. Vi ska beräkna summan $\sum_{k=0}^{10} 2^k$. Vi har alltså $a = 0$, $b = 10$, och $q = 2$ i formeln. Vi får direkt

$$\sum_{k=0}^{10} 2^k = \frac{2^{11} - 2^0}{2-1} = 2^{11} - 1 = 2047.$$

Exempel 16. Vi ska beräkna summan $s = \sum_{k=0}^{7} 5 \cdot 3^{\frac{k}{2}}$. Det luriga här är vad kvoten är - efter utbryting av 5 och omskrivningen $3^{\frac{k}{2}} = (3^{\frac{1}{2}})^k = \sqrt{3}^k$ har vi $s = 5\sum_{k=0}^{7} \sqrt{3}^k$. Kvoten är alltså $\sqrt{3}$. Insättning i formeln ger nu

$$s = 5(\frac{\sqrt{3}^8 - \sqrt{3}^0}{\sqrt{3}-1}) = 5(\frac{3^4 - 1}{\sqrt{3}-1}) = \frac{400}{\sqrt{3}-1}.$$

Summor - Övningsuppgifter

1. Beräkna följande summor.
   (a) $\sum_{j=0}^{3} \frac{1}{2^j}$
   (b) $\sum_{k=-3}^{4} k^3$
   (c) $\sum_{k=1}^{3} \frac{k+1}{k^2+k}$

2. Skriv följande summor med hjälp av summa-tecken. Du behöver inte räkna ut summans värde.
   (a) $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+\cdots+99+100$
   (b) $1+8+27+64+125$
   (c) $-2+4-6+8-10+12-14+16-18+20$
   (d) $1+2+4+8+16+32+64+128+256+512+1024$
   (e) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}$
   (f) $\frac{3}{1}+\frac{4}{4}+\frac{5}{9}+\frac{6}{16}+\frac{7}{25}+\frac{8}{36}+\frac{9}{49}$

3. Låt $A=\{0,1,2\}$ och $B=\{2,3,4\}$. Beräkna följande summor:
   (a) $\displaystyle\sum_{x\in A} x+\sum_{x\in B} x$
   (b) $\displaystyle\sum_{x\in A\cup B} x$
   (c) $\displaystyle\sum_{y\in A\cap B} \sqrt{4y+3}$
   (d) $\displaystyle\sum_{z\in B\setminus A} z^2$

4. Beräkna följande aritmetiska summor:
   (a) $1+2+3+4+\cdots+999+1000$
   (b) $\sum_{i=1}^{20}(3i+1)$
   (c) $\star\ 10+5+0-5-10-15-\cdots-105-110$

5. Använd formeln för geometriska summor för att beräkna följande summor. Du behöver inte förenkla ditt svar.
   (a) $5^2+5^3+5^4+5^5+\cdots+5^{10}$
   (b) $\sum_{k=0}^{20}\pi^k$

6. Beräkna produkterna
   (a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{5} k$
   (b) $\displaystyle\prod_{x\in\{1,-2,5\}} x(x+1)$
   (c) $\displaystyle\prod_{k=0}^{1000} \frac{k^2+\sqrt{k}}{e^k+42}$ *tips: enklare än det ser ut!*

7. ⋆ Beräkna summan
$$\sum_{k=0}^{9}(7+3\cdot 2^k-3k).$$
tips: Summan kan delas upp i en aritmetisk och en geometrisk summa!

8. ⋆ Beräkna summan
$$\sum_{k=0}^{10}(-1)^k\frac{1}{2^k}.$$
tips: Skriv först om termerna på formen q^k. Vad ska q vara?

9. ⋆ Summan
$$\sum_{k=1}^{100}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$$
är ett exempel på något som kallas en *teleskopsumma*. Beräkna summan!
tips: Man behöver inte skriva ut alla termer utan det finns ett "trick". Prova att skriva ut ett par av de första termerna för att upptäcka tricket!

Logik - Facit och kommentarer

1. (a) S
   (b) S (vi behöver inte ens ta reda på om 8537 är ett primtal)
   (c) S
   (d) S
   (e) F (x kan ju t.ex. vara 3)
   (f) F (x kan ju t.ex. vara -4)
   (g) F (inte sant för exempelvis $x = -1$)
   (h) S (x kan ju vara t.ex. $0, 1, -1$)

2. (a)

P	Q	P *xor* Q
S	S	F
S	F	S
F	S	S
F	F	F

   (b) Exempelvis $(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$.

3.

P	Q	R	$P \vee \neg Q$	$R \Rightarrow P$	$(P \vee \neg Q) \wedge (R \Rightarrow P)$
S	S	S	S	S	S
S	S	F	S	S	S
S	F	S	S	S	S
S	F	F	S	S	S
F	S	S	F	F	F
F	S	F	F	S	F
F	F	S	S	F	F
F	F	F	S	S	S

4. Den kontrapositiva utsagan till "Om det är söndag idag så är universitetet stängt" blir i ord ungefär "Om universitetet är öppet idag så är det inte söndag".

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
S	S	S	S
S	F	F	F
F	S	S	S
F	F	S	S

   Sanningstabellerna för $\neg Q \Rightarrow \neg P$ och $P \Rightarrow Q$ är exakt samma. Detta betyder att utsagorna är ekvivalenta och har exakt samma logiska innebörd. Notera dock att $P \Rightarrow Q$ **inte** är ekvivalent med $\neg P \Rightarrow \neg Q$!

5. (a) Budskapet som skylten vill framföra är nog $\big((Q \wedge R) \vee U\big) \Leftrightarrow P$.
   (b) Texten skulle dels kunna misstolkas som $\big(Q \wedge (R \vee U)\big) \Leftrightarrow P$; i sånt fall skulle inte en lång 10-åring vara välkommen ens med förälder. En annan misstolkning skulle kunna vara $\big((Q \wedge R) \vee U\big) \Rightarrow P$ (vilket det egentligen är vad som står på skylten!) Detta utesluter inte att man kan vara välkommen trots att man inte uppfyller några av villkoren! Detta illustrerar att vardagligt språk och matematiskt språk inte alltid har samma innebörd. Ett förslag på text för

logiker på Liseberg är: *Du är välkommen om och endast om minst ett av följande villkor är uppfyllda: (a) Du är > 11 år och är $> 130cm$. (b) Du har sällskap med en förälder.*

6. $P \Rightarrow Q$, $P \Rightarrow R$, $P \Rightarrow U$, $R \Leftrightarrow U$, $R \Rightarrow Q$, $U \Rightarrow Q$, vilket kan sammanfattas som:

$$P \Rightarrow R \Leftrightarrow U \Rightarrow Q$$

7. $\forall x : (\exists y : y > x)$ blir ungefär "För varje tal x finns ett större tal y". Detta är såklart sant.
$\exists y : (\forall x : y > x)$ blir ungefär "Det finns ett tal y som är större än alla reella tal x" detta är falskt - det finns inget största tal. Exemplet visar att man inte alltid kan byta ordning på kvantorer utan att ändra innebörden.

8. $(\exists x : x > 5) \wedge (\exists x : x < 3)$ är sann: det finns både tal som är större än 5 och tal som är mindre än 3
Å andra sidan är $\exists x : (x > 5 \ \wedge \ x < 3)$ falsk. Inget tal kan vara både större än 5 och mindre än 3. Poängen är att det inte behöver vara samma x i de två kvantorerna i den första utsagan. En slutsats man kan dra av detta exempel är att man bör vara försiktig med att flytta parenteser i logiska uttryck!

9. Det stora misstaget begås vid sista ekvivalenspilen - ekvivalensen gäller bara då $a^2 - ab \neq 0$. Men eftersom $a = b$ är ju $a^2 - ab$ noll och på näst sista raden står alltså $2 \cdot 0 = 0$ här kan vi inte dela med noll och få $2 = 1$!
Den första ekvivalenspilen är faktiskt också fel, den borde vara en implikationspil. Bara för att $a^2 = ab$ behöver vi inte ha $a = b$, det kan ju exempelvis vara så att $a = 0$ och $b = 1$.

10. (a)

P	Q	P *nand* Q
S	S	F
S	F	S
F	S	S
F	F	S

(b) Först ser man att vi att P *nand* $P \ \Leftrightarrow \ \neg P$.
Från detta följer att

$$(P \textit{ nand } Q) \textit{ nand } (P \textit{ nand } Q) \ \Leftrightarrow \ \neg(P \textit{ nand } Q) \ \Leftrightarrow \ P \wedge Q$$

$$(P \textit{ nand } P) \textit{ nand } (Q \textit{ nand } Q) \ \Leftrightarrow \ \neg(\neg P \wedge \neg Q) \ \Leftrightarrow \ P \vee Q.$$

Detta har en intressant teknisk konsekvens: om man vill bygga någon typ av framtida dator med ny teknik så räcker det med att kunna konstruera en *nand*-krets. Man kan sedan koppla ihop dessa för att kontruera alla typer av logiska operationer.

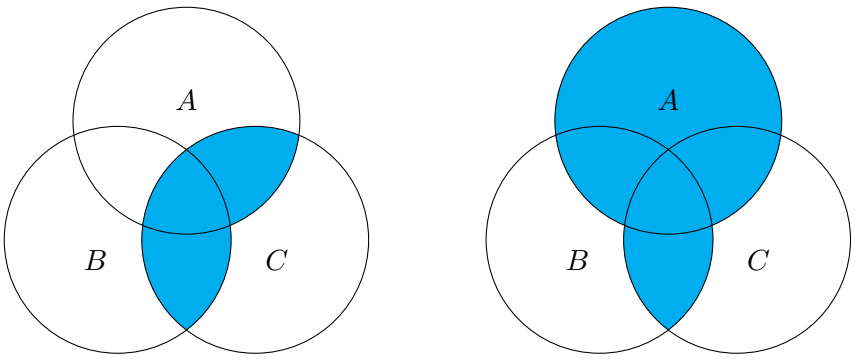
Mängder - Facit och kommentarer

1. (a) F (med $\subset$ hade det varit sant)
   (b) F (med $\in$ hade det varit sant)
   (c) S
   (d) S

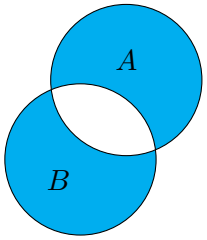
2. (a) $\{y, z, w\}$
   (b) $\{1, 3, 5, 7\}$
   (c) $\{\sqrt{2}, -7, \pi\}$
   (d) $\{1, -1\}$
   (e) $[0, 9)$
   (f) $(3, 7)$ Detta skrivsätt är vanligt, $|x - a| < b$ uppfylls av alla x vars avstånd från a på tallinjen är mindre än b, alltså intervallet alla $x \in (a - b, a + b)$ när b är positiv.
   (g) {Mängden av alla primtal}

3. Flera svar är möjliga, exempelvis:
   (a) $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
   (b) $\{4k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$
   (c) $\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$
   (d) $\{[a, a + 3] \mid a \in \mathbb{R}\}$
   (e) $\{(n - \frac{\pi}{2}, n + \frac{\pi}{2}) \mid n \in \mathbb{Z}\}$

4. Mängderna (a) och (c) är lika: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, och dessa visas till vänster. Till höger visas mängden i (b), alltså $A \cup (B \cap C)$.



5. (a)



   (b) Exempelvis $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

(c) Exempelvis $A \Delta B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$. Mängden kan också skrivas $A \Delta B = \{x \mid x \in A \textit{ xor } x \in B)\}$ med hjälp av en tidigare övning!

6. (a) $[-2, \pi)$
   (b) $(0, \sqrt{2}]$
   (c) $[-2, 0] \cup (\sqrt{2}, \pi)$
   (d) $\varnothing$
   (e) $[2, \pi)$

7. Exempelvis $(\frac{7}{13}, \{5, 17, 42\})$ och $(5, \{0\})$ och $(3, \varnothing)$.

8. (a) 5
   (b) 0
   (c) 2
   (d) $2 \cdot 3 = 6$
   (e) $2 \cdot 2^3 = 16$
   (f) 0 (A innehåller siffror, $\mathcal{P}(A)$ innehåller mängder, inga element gemensamma)
   (g) $2^{(2^3)} = 256$

9. Mängden har 10 element: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(0, 3)$. Mängden kan visualiseras som alla heltalspunkter i planet som ligger i eller på triangeln som begränsas av x-axeln, y-axeln, och linjen $y = -x + 3$.

10. Båda har rätt! Studenterna har skrivit ned samma mängd på två olika sätt. Samma t-värde motsvarar olika punkter i de två mängdbyggarna, men *hela mängderna är lika*. Om vi t.ex. tar $t = 0$ i den första mängdbyggaren får vi lösningen $(x, y) = (1, 0)$ till ekvationssystemet. Denna lösning finns också i den andra mängdbyggaren, men motsvaras här av $t = 1$. Både mängderna innehåller punkterna på linjen $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$. Exakt hur man går tillväga för att lösa denna typ av system (och större) lär man sig oftast i en kurs i linjär algebra.

Funktioner - Facit och kommentarer

1. (a) $6y + 5$
   (b) $2x^2 + 3$
   (c) $4x^2 + 12x + 9$
   (d) 4

2. f är injektiv, surjektiv, bijektiv. g är varken injektiv, surjektiv, eller bijektiv. h är endast injektiv.

3. För att regeln ska fungera krävs dels att $x \neq 4$ och dels att $2x + 3 > 0$. Det senare villkoret uppfylls då $x \in [-\frac{3}{2}, \infty)$. Största möjliga definitionsmängd i $\mathbb{R}$ blir därför $D = [-\frac{3}{2}, \infty) \backslash \{4\}$.

4. (a) Existerar ej, ty $|A| > |B|$.
   (b) Exempelvis funktionen f : äpple $\mapsto$ tiger, banan $\mapsto$ kanin, melon $\mapsto$ kanin.
   (c) Existerar ej, eftersom inga injektiva funktioner finns.
   (d) Exempelvis funktionen f : äpple $\mapsto$ tiger, banan $\mapsto$ tiger, melon $\mapsto$ tiger.
   (e) Injektiva finns, t.ex g : tiger $\mapsto$ äpple, kanin $\mapsto$ banan.
   Surjektiva existerar ej ty $|A| > |B|$
   Bijektiva existerar ej, eftersom surjektiva ej finns,
   Ett exempel som varken är injektiv eller surjektiv är g : tiger$\mapsto$äpple, kanin$\mapsto$äpple.

5. (a) $g(1) = 1$, $g(9)$ är odefinierat! $g(4) = 2$ och $g(\sqrt{5}) = 1$.
   (b) $g(g(\pi)) = \sqrt{pi}$
   (c) $[0, 2) \cup [-3, 2) \cup (\sqrt{3}, \sqrt{5}] = [-3, \sqrt{5}]$. Unionen till vänster motsvarar värdena som fås från de tre olika fallen!

6. (a) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $f^{-1}(x) = \frac{7-y}{2}$.
   (b) $g^{-1} : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ ges av $g^{-1}(b) = 1$, $g^{-1}(c) = 2$, $g^{-1}(a) = 3$.
   (c) $h^{-1} = h$. Funktionen är sin egen invers!

7. Många exempel är möjliga, här visar jag maximala mängder D och M.
   (a) $D = [0, \infty)$ och $M = \mathbb{R}$
   (b) $D = \mathbb{R}$ och $M = [0, \infty)$
   (c) $D = [0, \infty) = M$

8. Exempelvis $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ med $f(x) = x + 1$. Den är "nästan" surjektiv, men inget element avbildas på 0.

9. Det är enkelt att algebraiskt hitta "inversen" för uttrycken i de två fallen, men det gäller att vara noga med intervallen där inversen är definierad - dessa motsvarar den del av värdemängden som fås för de två styckvisa uttrycken i g.

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{när } 1 \leq x < 3 \\ x + 1 & \text{när } 3 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Summor - Facit och kommentarer

1. (a) $\sum_{j=0}^{3} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$
   (b) $\sum_{k=-3}^{4} k^3 = (-27) + (-8) + (-1) + 0 + 8 + 27 + 64 = 64$
   (c) $\sum_{k=1}^{3} \frac{k+1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{3} \frac{(k+1)}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$. Det går också att skriva ut termarna direkt, men ofta hjälper det att förenkla *innan* man summerar.

2. Det finns flera svar. Exempelvis:
   (a) $\sum_{k=1}^{100} k$
   (b) $\sum_{k=1}^{5} k^3$
   (c) $\sum_{k=1}^{10} (-1)^k (2k)$
   (d) $\sum_{k=0}^{10} 2^k$
   (e) $\sum_{k=1}^{5} \frac{x^k}{k}$
   (f) $\sum_{k=1}^{7} \frac{k+2}{k^2}$

3. (a) $(0 + 1 + 2) + (2 + 3 + 4) = 12$
   (b) $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
   (c) $\sqrt{11}$ (summan har bara en term)
   (d) $3^2 + 4^2 = 25$

4. (a) $\frac{1000}{2}(1 + 1000) = 500 \cdot 1001 = 500500$
   (b) $\frac{20}{2}(4 + 61) = 10 \cdot 65 = 650$
   (c) $\frac{25}{2}(10 + (-110)) = (12.5) \cdot (-100) = -1250$. Ibland är det svårt att lista ut antalet termer. Då kan det vara lättare att först skriva om: $10 + 5 + 0 - 5 - 10 - 15 - \cdots - 100 - 105 - 110 = \sum_{k=-2}^{22} (-5k)$. Då ser vi att första och sista termen stämmer och att antalet termer är $22 - (-2) + 1$ (alltså skillnaden mellan övre och nedre gräns plus ett).

5. (a) $\frac{5^{11} - 5^2}{4}$
   (b) $\frac{\pi^{21} - 1}{\pi - 1}$

6. (a) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. (Detta skrivs också $5!$ och kallas "fem-fakultet")
   (b) $(1 \cdot 2) \cdot (-2 \cdot (-1)) \cdot (5 \cdot 6) = 2 \cdot 2 \cdot 30 = 120$
   (c) 0 (första faktorn är noll!)

7. $$\sum_{k=0}^{9} (7 + 3 \cdot 2^k - 3k) = \sum_{k=0}^{9} (7 - 3k) + 3 \sum_{k=0}^{9} 2^k$$
   $$\frac{10}{2}(7 + (-20)) + 3\frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = -65 + 3(1023) = 3004$$

8. $q = -\frac{1}{2}$. När man gjort omskrivningen är det svåra i uppgiften mest förenklingarna.

   $$\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{10} (-\tfrac{1}{2})^k = \frac{(-\frac{1}{2})^{11} - (-\frac{1}{2})^0}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{-\frac{1}{2048} - 1}{-\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1}{2048} + 1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2049}{2048} = \frac{683}{1024}.$$

9. Vi skriver ut ett par termer:

$$(\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5})+\cdots$$

Här ser vi att den andra delen av varje term tas ut av den första delen av nästa term! Det enda som blir kvar är första delen av första termen och sista delen av sista termen. Summan blir alltså $1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$.