TMV200 Föreläsning 2

Anteckning...	TMV200 Föreläsningar		
Skapad:	2020-11-06 07:59	**Ändrad:**	2020-11-06 09:52
Författare:	hchristian.johansson@gmail.com		

Senast: Satslogik, logiska operatorer & relationer, tautologier.

Logiska argument: (§1.6)

Ett logiskt argument består av ett antal "ingående" sammansatta utsagor $H_1, \dots, H_m$ (hypoteser) och en "utgående" sammansatt utsaga C, alla beroende på utsagor $P_1, \dots, P_n$, så att

$$(H_1 \wedge \dots \wedge H_m) \longrightarrow C$$

är en tautologi när man expanderar den i termer av $P_1, \dots, P_n$. C kallas för slutsatsen.

Ex $(H_1 \wedge H_2) \longrightarrow C$

ser inte ut som en tautologi, men om

$H_1 = P$, $H_2 = P \longrightarrow Q$ och $C = Q$

får vi $(P \wedge (P \longrightarrow Q)) \longrightarrow Q$

vilket är en tautologi.

Boken skriver

$$\frac{\begin{array}{l} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_m \end{array}}{C}$$

Se övning 1.7, och torsdag nästa vecka.

Predikatlogik och mängdlära

Mängder

En mängd är en väldefinierad samling av objekt.

Viktigt: För varje tänkbart objekt x och varje mängd M skall man kunna avgöra om x tillhör M eller inte (i alla fall teoretiskt)

Objekten inuti en mängd kallas för dess element.

Skriver $x \in M$ eller $x \notin M$

$\in$: tillhör

$\notin$: tillhör inte

Notation 1 - uppräkning

Ett sätt att definiera en mängd är att räkna upp dess element. Man skriver elementen inom { }.

Ex:

$M_1 = \{ \text{Stockholm}, \text{Malmö}, \text{Göteborg} \}$.

$M_2 = \{1, 2, 3, 4\}$.

$M_3 = \{ \text{alla heltal} \} = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Spelar ingen roll i vilken ordning man räknar upp elementen, eller hur många gånger man gör det.

$M_2 = \{1,2,3,4\} = \{4,1,3,2\} = \{1,4,1,2,2,3,1\}$.

Definition: Två mängder M och N är lika, $M = N$, om de har samma element, dvs

$$x \in M \iff x \in N$$

för alla tänkbara objekt x.

Predikat

Ofta vill man använda sig av påståenden som beror på en eller flera variabler.

Ex: $P(x)$: $x \leq 5$

$Q(y)$: y ligger i Europa.

Inte (slutna) utsagor — sanningsvärdet beror på vad x (eller y) är.

Kallas för predikat eller öppen utsaga.

Viktigt: Anger man värden får man en vanlig (sluten) utsaga

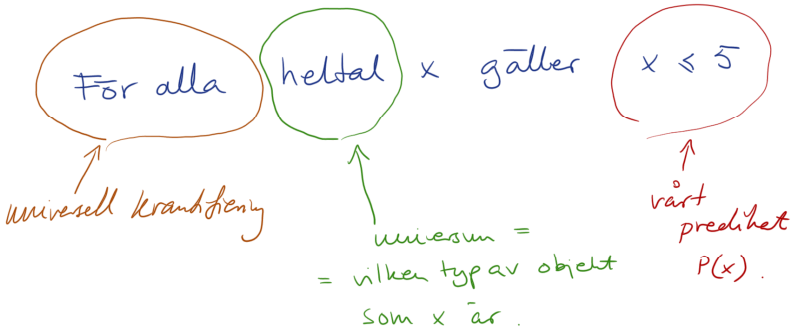
$P(2)$: $2 \leq 5$ (utsaga)

$Q(USA)$: USA ligger i Europa (utsaga).

Ett annat sätt att förvandla ett predikat till en utsaga är att kvantifiera över en domän/universum - en mängd.

Det finns två typer av kvantifiering, universell och existentiell.

Universell:



Man skriver $\forall x \in U : P(x)$

för alla, universum, predikat.

en mängd.

Existensiell:



Skrivet: $\exists y \in V : Q(y)$

det finns ett · universum · predikat.

$\forall$ och $\exists$ kallas för kvantorer.

Om universum är underförstått kan man skriva

$\forall x : P(x)$ eller $\exists y : Q(y)$.

OBS! Om man har flera variabler man kvantifiera över spelar det roll i vilken ordning man gör det, om kvantorerna är olika

Ex: $Q(x, y) : x > y$ universum U = alla heltal

- $\forall x \exists y : x > y$

"För varje heltal x finns ett heltal y som är mindre än x".

Sant: Givet x, ta t.ex $y = x - 1$.

- $\exists y \forall x : x > y$

"Det finns ett heltal y så att $x > y$ för alla heltal x".

... som är mindre än alla

dvs "Det finns ett heltal som är [illegible] heltal".

Falskt:

→ Gör övning 1.10 och läs kap 1.9 i boken

Några räkneregler för negation

$$\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$$
$$\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$$
$$\neg(\neg P) \iff P$$

$$\neg(P \to Q) \iff P \wedge \neg Q$$
$$\neg(P \longleftrightarrow Q) \iff (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

$$\neg\left(\forall x \in U : P(x)\right) \iff \exists x \in U : \neg P(x)$$
$$\neg\left(\exists x \in U : P(x)\right) \iff \forall x \in U : \neg P(x)$$

Mängdnotation 2 – predikat

Givet ett universum U och ett predikat $P(x)$ kan man definiera en mängd

$$M = \{ x \in U \mid P(x) \}$$

"M består av alla x i U så att $P(x)$ är sann".

Ex: $M_1 = \{ \text{Stockholm}, \text{Malmö}, \text{Gbg} \}$.

kan skrivas $M_1 = \{ x \text{ stad i Sverige} \mid x \text{ har } \geq 300\,000 \text{ invånare} \}$

(Sverige: universum)

predikat.

Viktiga mängder inom matematiken med egna beteckningar

$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ positiva heltal.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ naturliga talet

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ alla heltal

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}_+ \right\}$ rationella tal "heltalsbråk".

$\mathbb{R} = \{$ alla "decimaltal" $\}$ reella tal

$\mathbb{C} = \{$ komplexa tal $\}$. komplexa tal.

$\emptyset = \{\}$ tomma mängden, har inga element

$= \{x \mid x \neq x\}$ Fungerar lite som talet 0.

Mängdoperatorer och mängdrelationer

(Vi tänker oss alla mängder som en del av ett universum)

Relationer: M, N mängder.

- $M = N$ om $x \in M \iff x \in N$
- M är en delmängd till N om $x \in M \Rightarrow x \in N$,

  dvs alla element i M är också element i N.

  Skrivs $M \subseteq N$.

Ex $\emptyset \subseteq \mathbb{Z}_+ \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

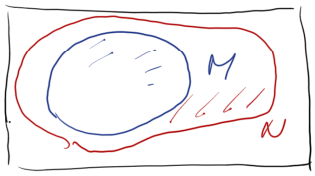
Viktigaste mängdoperatorerna:

Union: $M \cup N = \{ x \mid x \in M \vee x \in N \}$

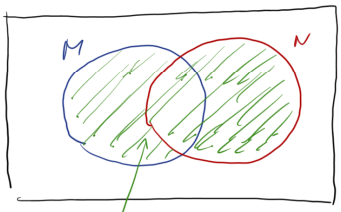
Snitt: $M \cap N = \{ x \mid x \in M \wedge x \in N \}$

Komplement: $M^c = \{ x \mid \underbrace{x \notin M}_{\neg(x \in M)} \}$

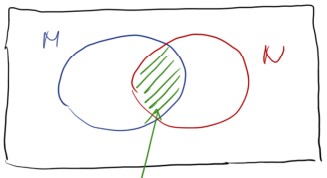
Venndiagram: (visualisering av mängdoperationer)



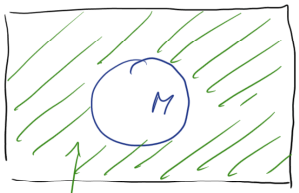
$M \subseteq N$



$M \cup N$



$M \cap N$



M^c

Några andra:

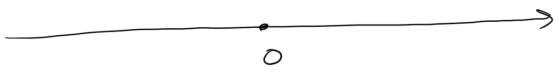
Kartesisk produkt: $M \times N = \{ (m,n) \mid m \in M, n \in N \}$

"mängden av alla ordnade par (m,n) där första koordinaten ligger i M och den andra ligger i N".

Potensmängd: $P(M) = \{ X \mid X \subseteq M \}$

mängden av alla delmängder till M.

Ex $\mathbb{R}$ brukar visualiseras som "tallinjen":



$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} =: \mathbb{R}^2$ är talplanet:

