

Föreläsning 4

Anteckning... TMV200 Föreläsningar

Skapad: 2020-11-13 08:01

Ändrad: 2020-11-13 09:51

Författare: hchristian.johansson@gmail.com

TMV200 13/11-20

Semert: Funktioner, summor/produkter.

Idag: Rekursion och induktion.

Först: Några speciella talföljder:

Aritmetiska talföljder:

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ så
differensen $a_{i+1} - a_i$ är konstant $\forall i=1, \dots, n-1$.

Ex $3, \overset{+4}{7}, \overset{+4}{11}, \overset{+4}{15}, \overset{+4}{19}, \overset{+4}{23}, \dots$

Skilnaden är 4.

$2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, \dots$
 $\underbrace{\quad}_{+6} \quad \underbrace{\quad}_{+6} \quad osv.$

Geometrisk talföljd:

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ så att
 $a_i \neq 0 \forall i$ och $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ konstant $\forall i$.

Ex

$$2, 6, 18, 54, 162, 486, \dots$$

$\underbrace{2 \times 3 = 6}$
 $\underbrace{6 \times 3 = 18}$
 $\underbrace{18 \times 3 = 54}$
 $\underbrace{54 \times 3 = 162}$
 $\underbrace{162 \times 3 = 486}$

knoten $\frac{a_{i+1}}{a_i} = 3$.

- Aritmetisk summa = summa av en aritmetisk talföljd.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ aritmetisk:

$\sum_{i=1}^n a_i$ motsvarande aritmetisk summa.

Resultat:

$$\sum_{i=1}^n a_i = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

(gäller
BARA för
aritmetiska
summor ∇)

Varför?:

$$3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 =$$

$$= (3 + 23) + (7 + 19) + (11 + 15) =$$

$$= 26 + 26 + 26 = \frac{6}{2} \cdot 26 =$$

$$= 78.$$

$$3 + 7 + 11 + 15 + 19 =$$

$$= (3 + 19) + (7 + 15) + 11 = 22 + 22 + 11 =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot 22 = 55.$$

Rekursion och induktion

Rekursion är en definitionsteknik där

man definierar en funktion/talföljd/etc.
"steg för steg".

Induktion är en bevissteknik där man
bevisar utsagor $P_1, P_2, P_3, \dots$ steg för steg.

OBS!: En ^{oändlig} talföljd $a_1, a_2, a_3, \dots$ är detsamma
som en funktion $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
($f(n) = a_n$).

"Definition" (Def 4.7 i boken)

$f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ är rekursivt deducerad om
 $\exists a \in \mathbb{Z}_+$ så att

- 1) $f(1), \dots, f(a)$ är givna ("startvärden")
 - 2) $\forall n \geq a+1$ är $f(n)$ en funktion av
 $f(1), \dots, f(n-1)$ ("rekursionen").
- inte bra! ||

PROBLEM: Definitionen är inte tillräckligt precis.

- 1) Kan jag olika funktioner för olika n ?
Verkar nästan som om jag "måste", för antalet
argument ökar.
- 2) Vilken typ av funktion får det vara?

Men idén rätt; funktionen är tänkt att byggas upp
steg för steg.

Def: (lite bättre än bokens)

$f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ är rekursivt definierad om
 $\exists a \in \mathbb{Z}_+$ och en funktion $h: \mathbb{R}^{a+1} \rightarrow \mathbb{R}$ så att

- 1) $f(1), \dots, f(a)$ är givna ("startvärden")
- 2) $f(n) = h(\underbrace{f(n-a), \dots, f(n-1)}_{\text{"de } a \text{ tidigare värdena"}}, n)$ för $n \geq a+1$.

Förflarande vissa problem; h skall helst vara "beräkningsbar".

Rekursiva funktioner är definierade på ett mer komplicerat sätt inom beräkningsteori.

Om $a=1$ har vi $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

- 1) $f(1)$ givet
- 2) $f(n) = h(f(n-1), n)$, $n \geq 2$.

Ex $a=1$, $f(1)=1$, $h(x,y)=xy$

$$\text{Så } f(n) = h(f(n-1), n) = n \cdot f(n-1)$$

$$\leadsto f(1)=1, f(2)=2, f(3)=6, f(4)=24, \dots$$

Kanske sett förut: $f(n) = n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Ex $a=2$: Fibonacci-följden

$$f(1) = f(2) = 1,$$

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2), \quad n \geq 3.$$

(normalt skriver man inte ut h , i det här fallet är $h(x, y, z) = x + y$).

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Tänk: "Rekursiv funktion = funktion man kan programmera".

Induktion

(inte samma induktion som i första föreläsningen!)

Låt $P_1, P_2, P_3, \dots$ vara utsagor (en utsaga P_n för varje $n \in \mathbb{Z}_+$).

Induktions-
-principen
(axiom)

Om

- 1) P_1 är sann, och
- 2) $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$

så är P_n sann för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Påstående 1) kallas för basfallet.

Påstående 2) kallas för induktionssteget.

Tänk:

Steg 2: Visa att en utsaga implicerar nästa.



↑
 Steg 1:
 Visa detta

Ex Geometrisk talföljd:

Kvot $c \neq 1$:

$$a_1, a_2 = a_1 \cdot c, a_3 = a_2 \cdot c = a_1 c^2, \dots, a_n = a_1 c^{n-1}$$

Geometrisk summa: $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_1 c^{i-1}$

Utsaga P_n : $\sum_{i=1}^n a_1 c^{i-1} = \frac{c^n - 1}{c - 1} \cdot a_1$

Bevis med induktion:

Basfall P_1 : $\sum_{i=1}^1 a_1 c^{i-1} = a_1$ och

$$\frac{c^n - 1}{c - 1} \cdot a_1 \underset{n=1}{=} \frac{c^1 - 1}{c - 1} \cdot a_1 = a_1$$

Så basfallet är sant.

Induktionssteget: Vill visa $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

Antag P_n sann, dvs $\sum_{i=1}^n a_1 c^{i-1} = \frac{c^n - 1}{c - 1} \cdot a_1$

induktions-
-antagande

Vill visa P_{n+1} sann, dvs $\sum_{i=1}^{n+1} a_1 c^{i-1} = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1} \cdot a_1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_1 c^{i-1} = \left(\sum_{i=1}^n a_1 c^{i-1} \right) + a_1 c^n = \left(\frac{c^n - 1}{c - 1} \cdot a_1 + a_1 c^n \right) =$$

använder induktionsantagandet!

$$\begin{aligned}
 &= a_1 \left(\frac{c^n - 1}{c - 1} + c^n \right) = a_1 \left(\frac{c^n - 1}{c - 1} + \frac{c^n(c - 1)}{c - 1} \right) = \\
 &= a_1 \left(\frac{c^n - 1 + c^{n+1} - c^n}{c - 1} \right) = a_1 \left(\frac{c^{n+1} - 1}{c - 1} \right)
 \end{aligned}$$

vilket var det vi ville visa!

Det avslutar induktionssteget.

Följst induktionsprincipen är därmed formeln sann för alla n .

(Om man vill kan man se det så här:

- 1) Visa P_1 .
- 2) Antag P_n , n godtyckligt
- 3) Visa P_{n+1} (sist P_n).
- 4) Dra slutsatsen att P_n är sann för alla n ,
med hjälp av induktionsprincipen.

Varianter på induktionsprincipen

Andra induktionsprincipen ("stark induktion").

$P_1, P_2, P_3, \dots$ utsagor.

stark induktion

Om

- 1) P_1 är sann (basfall)
- 2) $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow P_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$ (induktionssteg)

så är P_n sann $\forall n \in \mathbb{Z}_+$.

.. induktionsantagande ; vi antar

Skilnad: Starkare
 $P_1 \wedge \dots \wedge P_n$ är sanning för bara P_n .

Variation: Fler basfall:

variantt
med fler
basfall.

Om $\exists m \in \mathbb{Z}_+$
1) $P_1, \dots, P_m$ är sanna
2) $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow P_{n+1} \quad \forall n \geq m$.
så är P_n sann för alla n .

Kom ihåg: $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ betyder att implikationen

$P_n \rightarrow P_{n+1}$ är sann.