

Övning 16/11

Antecknin... TMV200 Övningar

Skapad: 2020-11-16 13:19

Ändrad: 2020-11-16 15:00

Författare: hchristian.johansson@gmail.com

4.8. $F(0) = 0, F(1) = 1,$
 $F(n) = F(n-1) + F(n-2), n \geq 2.$

Visa $\sum_{i=1}^n F(2i-1) = F(2n). \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$

Induktion: Basfall $n=1$:

$$\sum_{i=1}^1 F(2i-1) = F(1) = 1.$$

$$F(2 \cdot 1) = F(2) = F(0) + F(1) = 0 + 1 = 1.$$

Basfall OK.

Induktionssteget: Antag att $\sum_{i=1}^n F(2i-1) = F(2n).$

Vill visa $\sum_{i=1}^{n+1} F(2i-1) = F(2(n+1)) = F(2n+2).$

$$\sum_{i=1}^{n+1} F(2i-1) = \left(\sum_{i=1}^n F(2i-1) \right) + F(2(n+1)-1) =$$

$$= F(2n) + F(2n+1) \overset{\text{definitionen av Fibonacci-talet}}{=} F(2n+2).$$

$\uparrow$ induktionsantagandet

Induktionssteget OK.

Enligt induktionsprincipen har vi visat $\sum_{i=1}^n F(2i-1) = F(2n)$
för alla $n \in \mathbb{Z}_+.$

4.19 Visa att $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n > 1.$

Induktion:

Basfall $n=2$: $VL = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

$HL = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > \frac{5}{4}$ OK!

Induktionssteg: Antag att $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$.

Vill visa att $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n+1}$.

Först: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{(n+1)^2} < 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$
↑
induktions-
antagandet

Nu vill vi visa att $2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq -\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$
 $= \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$

OK, så vill att $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$.

Men det är korrekt! Equivalent med $(n+1)^2 \geq n(n+1)$

$\Leftrightarrow n+1 \geq n$.

4.2 Visa $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Induktion:

Basfall: $n=1$: $VL = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$.

$$H_L = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Induktionssteget: Antag att $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

vill visa att $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$

$$\begin{aligned} \text{Så } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{induktionsantagandet}}}{\frac{n}{n+1}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

Så induktionssteget är OK.

4.17
$$\begin{cases} L(1) = a \\ L(2) = b \\ L(n) = L(n-1) + L(n-2), \quad n > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(1) = 1 \\ F(2) = 1 \\ F(n) = F(n-1) + F(n-2), \quad n > 2 \end{cases}$$

Visa att $L(n) = b F(n-1) + a F(n-2)$
när $n > 2$.

Induktion:

Hur beror $L(n)$ på tidigare värden?

$$\begin{aligned} L(n) &\stackrel{\text{def.}}{=} \underbrace{L(n-1)}_{\substack{\text{antag:} \\ b F(n-2) + a F(n-3)}} + \underbrace{L(n-2)}_{\substack{\text{antag} \\ b F(n-3) + a F(n-4)}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= b F(n-2) + a F(n-3) + b F(n-3) + a F(n-4) = \\ &= (b F(n-2) + b F(n-3)) + a (F(n-3) + F(n-4)) = \end{aligned}$$

$$= b(F(n-2) + F(n-1))$$

$$= bF(n-1) + aF(n-2)$$

Alltså: Om $P_n = "L(n) = bF(n-1) + aF(n-2)"$

här vi visar att $P_{n-1} \wedge P_{n-2} \Rightarrow P_n$
induktionssteg!

Ser att vi behöver två basfall för att starta induktionen

$$\underline{n=3}: L(3) = L(2) + L(1) = b + a$$

$$bF(2) + aF(1) = b \cdot 1 + a \cdot 1 = b + a. \quad \underline{\underline{OK}}$$

$$\underline{n=4}: L(4) = L(3) + L(2) = (b+a) + b = 2b+a$$

$$bF(3) + aF(2) = 2b + a. \quad \underline{\underline{OK!}}$$

Så basfallen OK.

$$\underline{\underline{3.9}} \quad A = \{f \mid f(x) = a + bx + cx^2\}$$

$$B = \{f \mid f(x) = a + bx\}$$

$$D: A \longrightarrow B$$

$$D(a + bx + cx^2) = b + 2cx$$

a) Inte injektiv: Räcker att hitta två funktioner $f, g \in A$ så att $f \neq g$ men $D(f) = D(g)$.

$$\underline{\underline{\exists x}} \quad D(0) = 0, \quad D(1) = 0$$

Så kan ta $f=0$, $g=1$.

b) Är Surjektiv: Givet $g(x) = a + bx \in B$,
 måste hitta $f(x) = c + dx + ex^2 \in A$ med

$$D(f) = g$$

Drs: $d + 2ex = a + bx.$

så sätt $d = a, e = \frac{b}{2}.$

Drs: $D\left(c + ax + \frac{b}{2}x^2\right) = a + bx.$

c) Nej, inte ihjelt.

4.12 (f) Beräkna

$$\overset{a_0}{1} + \underbrace{\overset{a_1}{\frac{4}{7}} + \overset{a_2}{\frac{1}{7}} + \dots + \overset{a_{12}}{-\frac{29}{7}}}_{\substack{-\frac{3}{7} \quad -\frac{3}{7} \\ \text{aritmetisk summa.}}}$$

Hur många termer: $a_n = 1 - n \cdot \frac{3}{7}$

$$a_n = -\frac{29}{7} \Leftrightarrow 1 - n \cdot \frac{3}{7} = -\frac{29}{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 - 3n = -29 \Leftrightarrow n = 12.$$

Så summan har 13 termer.

$\Rightarrow$ Summan blir

$$\begin{aligned} \frac{13}{2} \cdot \left(1 + \left(-\frac{29}{7}\right)\right) &= \frac{13}{2} \left(\frac{7-29}{7}\right) = \\ &= -\frac{13 \cdot 22}{2 \cdot 7} = -\frac{13 \cdot 11}{7} = \\ &= -\frac{143}{7}. \end{aligned}$$