

Föreläsning 6

Anteckning... TMV200 Övningar

Skapad: 2020-11-17 13:13

Ändrad: 2020-11-17 15:05

Författare: hchristian.johansson@gmail.com

TMV200 17/11 - 20

Senast: Induktion & rekursion.

Idag: Kombinatorik.

Behöver fler studentrepresentanter ▼ ○

[Maila mig eller skicka meddelande på Canvas om du är intresserad.]

(Stark) induktion

Om $\exists m \geq 1$ så att

1) $P_1 \wedge \dots \wedge P_m$ är sann, och

2) $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow P_{n+1} \quad \forall n \geq m$

så är P_n sann för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Lösningsförslag på induktionsuppgiften.

Argumentet visar falskt att P_1 sann, och att $P_n \Rightarrow P_{n+1} \quad \forall n \geq 2$.

Men $P_1 \rightarrow P_2$ är falsk, argumentet fungerar inte.

Ex $P_2 \rightarrow P_3$ är sann pga följande:

$\{H_1, H_2, H_3\}$ och H_1 har samma färg som H_2
och H_2 har samma färg som H_3 , så har
alla samma färg.

Men det funkar inte för att visa $P_1 \rightarrow P_2$.

Ger ett exempel för att sannings Tabellen för $\rightarrow$
är rikligt

P_1	P_2	P_3	P_4	- - -
S	F	F	F	

Ger att $P_1 \rightarrow P_2$ är falsk, men $P_n \rightarrow P_{n+1}$ sann
för alla $n \geq 2$, vilket faktiskt var det vi visade
(utan att veta sanningsvärdena på $P_2, P_3, \dots$).

Kombinatorik

Hur många sätt kan man göra saker på?

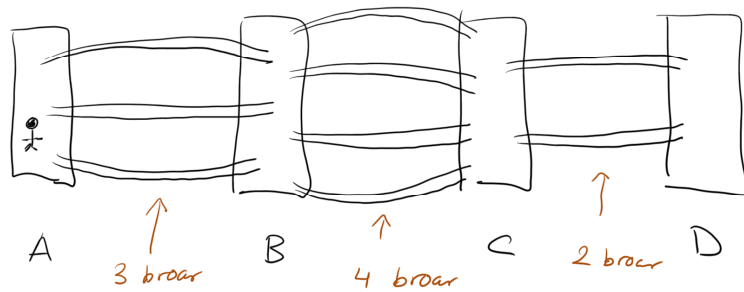
Multiplikationsprincipen

Antag att k oberoende "val" skall göras
och att de individuellt kan göras på
 $n_1, n_2, \dots, n_k$ olika sätt

Då är antalet sätt de k valen kan göras på

$$n_1 n_2 \dots n_k = \prod_{i=1}^k n_i$$

Ex



Hur många sätt kan jag gå från A till D?
(utan att gå "bakåt").

- 3 sätt att gå från A till B
- 4 sätt från B till C
- 2 sätt från C till D

Enligt multiplikationsprincipen finns det

$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24 \text{ sätt}$$

att gå från A till D.

Notation Om A är en mängd, så
skriver vi $|A|$ för antalet element
i A ,
(antar att A är ändligt)

Ex $|\{1, 2, 3\}| = 3$,
 $|\{a, b, d, f, g\}| = 5$.

Permutationer ("uppräkningsor")

A mängd med n element, $1 \leq r \leq n$. heltal.

En permutation av r element i A är en
uppräknings $x_1, x_2, \dots, x_r$ av r olika element
i A

Kan också tänka: Vi väljer r element från A ,
och ordningen spelar roll.

OBS! Ordningen är viktig!

Fakultetsfunktionen

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \prod_{i=1}^n i, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

Hur många permutationer av r element ur A
finns det? $|A| = n$.

Skall välja $x_1, \dots, x_r$, ordningen spelar roll.

x_1	kan väljas på	n	sätt
x_2	— —	$n-1$	sätt
x_3	— —	$n-2$	sätt
$\vdots$			
x_r	kan väljas på	$n-r+1$	sätt

Alltså: ^{Permutationen} $(x_1, \dots, x_r)$ kan väljas på

$$n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) \quad \text{olika sätt,} \\ n = |A|.$$

Kan också skrivas som

$$\begin{aligned} n(n-1) \dots (n-r+1) &= \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)(n-r) \dots 2 \cdot 1}{(n-r) \dots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

mer kompakt, men sämre för
numeriska beräkningar!

OBS! Formeln stämmer även när $r = n$.

Kombinationer A mängd, $|A| = n$.

Ibland vill man välja element utan hänsyn till
ordningen.

En kombination av r element ur A är ett
val av r element ur A där ordningen inte
spelar roll. olika

Med andra ord: En kombination av r
element ur A är en delmängd av A
med r element.

Hur många kombinationer av r element ur A
finns det? ($|A| = n$).

Varje permutation $x_1, \dots, x_r$ ^{ur A} ger en
kombination $\{x_1, \dots, x_r\} \subseteq A$.

– Hur många permutationer ger samma
kombination?

– Dvs, på hur många sätt kan man
räkna upp elementen ur en kombination

$\{x_1, \dots, x_r\} \subseteq A$?

Kan göras på $r!$ sätt $\left(\begin{matrix} \text{permutation av } r \\ \text{element ur} \\ \{x_1, \dots, x_r\} \end{matrix} \right)$.

Så antalet kombinationer av r element ur n
 är $\frac{\text{antalet permutationer av } r \text{ element ur } A}{r!} =$

$$= \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Def: Låt $r, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq n$. Vi sätter

$$\binom{n}{r} := \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

utläses "n över r" (bättre: "n välj r").

Kallas binomialkoefficienter

Ex $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 5}{1} = 35$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{5040}{6 \cdot 24} = 35$$

Inte
rekommenderat
att räkna
på det
sättet! ∇
0

Kom ihåg: Kvadreringsregeln:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Högre potenser? $(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) = \dots =$
 $= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Binomialsatsen (6.14 i boken) $n \in \mathbb{Z}_+$, x, y variabler

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$\text{Dä är } (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Varför?

$$(x+y)^n = \overbrace{(x+y)(x+y) \dots (x+y)}^{n \text{ ggr}}$$

Om vi expanderar ut, får vi 2^n termer på formen $x^k y^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$.

För fixt k , hur många $x^k y^{n-k}$ får vi?

Skall välja ut k parenteser $(x+y)$ ur vilket vi väljer x , från ömga väljer vi y .

Kan göras på $\binom{n}{k}$ sätt, så $x^k y^{n-k}$ dyker upp $\binom{n}{k}$ ggr.

$$\text{Alltså är } (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$