Induktionsuppgift

Anteckning...	TMV200 Övningar		
Skapad:	2020-11-16 20:48	**Ändrad:**	2020-11-17 16:49
Författare:	hchristian.johansson@gmail.com		

Påstående: Alla hästar har samma färg.

Bevis: Sätt P_n = "om $\{H_1, \dots, H_n\}$ är en mängd av n hästar, så har alla hästar H_i samma färg".

Vi bevisar nu påståendena P_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, med hjälp av induktion.

Basfall P_1 = "om $\{H_1\}$ är en mängd av 1 häst, så har alla H_i samma färg"

Korrekt, det finns ju bara en häst i mängden, så alla har samma färg.

Induktionssteg: Antag att P_n är sann.

Låt $\{H_1, \dots, H_{n+1}\}$ vara en mängd av $n+1$ hästar. Titta på delmängderna

$\{H_1, \dots, H_n\}$ och $\{H_2, \dots, H_{n+1}\}$;

de är mängder av n hästar.

Enligt induktionsantagandet har alla hästar i dessa delmängder samma färg.

Men $H_2 \in \{H_1, \dots, H_n\}$ och $H_2 \in \{H_2, \dots, H_{n+1}\}$,

så alla hästar $H_1, H_2, \dots, H_n, H_{n+1}$ har samma färg.

Så induktionssteget är OK, och beviset är klart.

Var är felet i beviset?

Basfallet är korrekt.

Induktionssteget visar att $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ för $n \geq 2$, men argumentet håller inte för att visa $P_1 \to P_2$.

Vi visar det genom att jämföra $P_2 \to P_3$ med $P_1 \to P_2$:

$P_2 \to P_3$

Antag att P_2 är sann, dvs i alla mängden med två hästar har hästarna samma färg.

Låt $\{H_1, H_2, H_3\}$ vara en mängd med tre hästar.

Titta på $\{H_1, H_2\}$ och $\{H_2, H_3\}$.

Induktionsantagandet ger att H_1 och H_2 har samma färg, och att H_2 och H_3 har samma färg. Alltså måste H_1 och H_3 alla ha samma färg (båggge har samma färg som H_2), så alla hästarna H_1, H_2, H_3 har samma färg.

Så P_3 stämmer, dvs vi har visat $P_2 \Rightarrow P_3$.

$P_1 \to P_2$

Om vi nu försöker samma argument får vi problem. Induktionsantagandet är att i alla mängder med 1 häst så har hästarna samma

färg.

Låt nu $\{H_1, H_2\}$ vara en mängd av två hästar. Om vi delar upp som förut så får vi bara att H_1 har samma färg som sig själv, och samma för H_2.

Förut kunde vi använda H_2 för att länka H_1 och H_3, men nu fungerar det inte — argumentet fungerar inte. (och det är rimligt, eftersom $P_1 \to P_2$ är falsk).