

Föreläsning 6

Anteckning... TMV200 Föreläsningar

Skapad: 2020-11-18 07:57

Ändrad: 2020-11-18 09:45

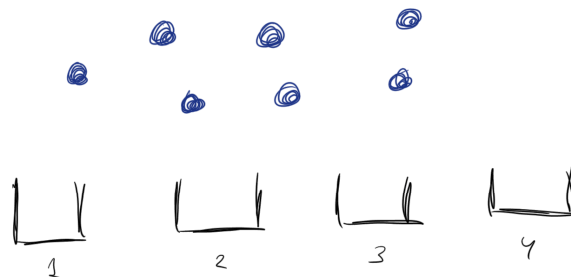
Författare: hchristian.johansson@gmail.com

TMV200 18/11 - 20

Igår: Kombinatorik - permutationer & kombinationer

I dag: "Problemlösning".

På hur många sätt kan jag fördela 7 lika
bollar i fyra olika lådor?



Om bollarna varit olika: Använd multiplikationsprincipen.
(ger 4^7 sätt).

Visuellt trick: En uppdelning är en sekvens



Har 7 bollar + 3 tre "väggar" / "avgränsare".

Var väggen sitter avgör hur uppdelningen ser ut.

Totalt 10 symboler (7 bollar + 3 väggar) varav tre skall vara väggar.

Kan göras på $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$ sätt.

Slutsats: Man kan fördela n lika objekt i k olika högar på $\binom{n+k-1}{k-1}$ olika sätt.

Ex Tre barn skall få 8 äpplen.

På hur många sätt kan äpplena fördelas

1) utan restriktioner?

Samma problem som ovan, $\binom{10}{2} = 45$ sätt.

2) om alla skall få minst ett äpple?

Först ger vi alla var sitt äpple.
Sen delar vi upp resterande 5 äpplen
- kan göras på $\binom{7}{2} = 21$ sätt.

3) om äldste barnet skall få max 4 äpplen?

Tänker tvärtom först:
På hur många sätt kan vi dela ut äpplena så att äldste får minst fem?

Först 5 till äldste, sen delar vi ut resterande 3:

Kan göras på $\binom{5}{2} = 10$ sätt.

Så antalet sätt så att äldste barnet får max 4 är

$\underbrace{45}_{\text{alla sätt}} - \underbrace{10}_{\text{minst 5 till äldste}} = 35$ sätt

4) om de två yngsta skall få lika många?

De två yngsta kan få 0, 1, 2, 3, 4 var, och äldste får resten.

Så det kan göras på 5 sätt.

Räkna saker på trä salt

$$n, k \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Satz (6.13 i. broken) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Beris: $\binom{n+1}{k}$ är antalet sätt jag kan välja k tal ur $\{1, 2, \dots, n+1\}$.

Vi kan också bekräfta det på ett annat sätt:

Antingen får vi med $n+1$ bland våra k tal, eller inte.

Om inte: Då skall alla k talen väljas från $\{1, 2, \dots, n\}$, kan göras på $\binom{n}{k}$ sätt.

Om med: Då skall vi välja ytterligare $k-1$ tal från $\{1, 2, \dots, n\}$, kan göras på $\binom{n}{k-1}$ sätt.

Så totalt kan det göras på $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ sätt.

Alle binär ar $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Kan visualisera binomialkoefficienterna i

Pascals triangle:

[illegible]

ger binomialkoefficienterna, enligt satsen.

$$\text{är } \binom{n}{k-1}$$

Ex Visa att
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

$$\binom{n}{k} = \text{antalet delmängder till } A = \{1, 2, \dots, n\} \text{ med } k \text{ element.}$$

$$\text{Så } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \left(\begin{array}{c} \text{antalet } B \subseteq A \\ \text{med } |B|=k \end{array} \right) = \text{antalet delmängder till } A.$$

Antalet delmängder till A kan också beräknas på följande sätt:

En delmängd $B \subseteq A$ bestäms av att, för varje $x \in A$, bestämma $x \in B$ eller $x \notin B$. Valen är oberoende, så multiplikationsprincipen ger att en delmängd kan väljas på

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ ggr}} = 2^n \text{ sätt.}$$

Så antalet delmängder är $= 2^n$, och alltså

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Lådprincipen (pigeonhole principle)

[Om $n+1$ objekt placeras i n lådor, måste det finnas en låda med minst två objekt i.

Ex 25 elever går i en skolklass. Visa att
minst tre st är födda i samma månad.

Finns 12 månader - mha "lådor"
25 elever - mha "objekt"

$25 = 2 \cdot 12 + 1$, så måste finnas en "låda"
med tre "objekt" i, dvs 3 elever födda i samma
månad.

Ex 40 personer går på en fest. Visa att
minst två personer har skakat hand med lika
många personer.

Varje person skakar hand med

0, 1, 2, 3, ..., 38 eller 39 personer.

Objekt: de 40 personerna.

Lådor: Antalet möjliga handskakningar

0, 1, 2, ..., 39
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{40 \text{ st.}}$

Funkar inte... men!

Om någon har skakat hand med 39 pers, så
har ingen skakat hand med 0 pers.

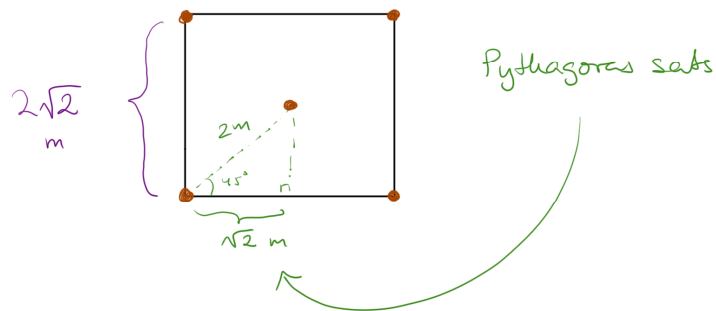
Så antingen är 0 "tom", eller så är 39 "tom"

Så det kommer vara högst 39 "icke-tomma" lådor,

så vi kan tillämpa lådprikeln

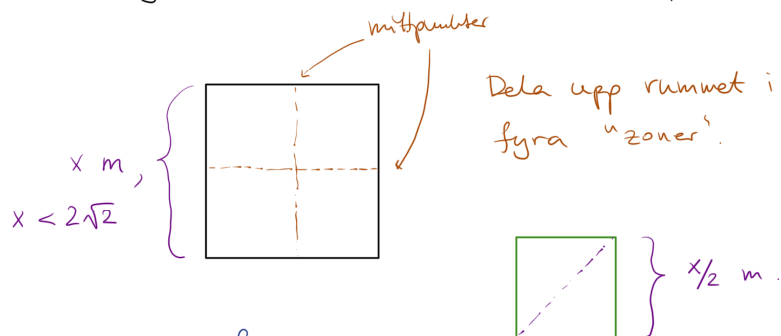
$\Rightarrow$ det finns två pers som skakat hand med
lika många.

Ex Fem personer skall stå i ett kvadratisk rum med minst 2 m avstånd. Hur litet kan rummet vara?



Så ett kvadratisk rum på $(2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 = 8 \text{ m}^2$ funkar.

Kan man göra det i ett mindre rum?



Men nu har jag fem personer som skall placeras ut i fyra "zoner", så det måste finnas en zon med två pers i, och de kommer stå på ett avstånd mindre än två meter.

diagonalen är $< 2 \text{ m}$.
Så det är mindre än två meter mellan två punkter som helst.

Så 8 m^2 är det minsta rummet som är möjligt.