

Föreläsning 7

Anteckning... TMV200 Föreläsningar

Skapad: 2020-11-20 07:55

Ändrad: 2020-11-20 09:46

Författare: hchristian.johansson@gmail.com

TMV200 20/11-20

Studentrepresentanter:

Jacob Bengtsson
Gustaf Jonasson Johansson
Steffanie Kristiansson
Jakob Persson



Kontakta
dem om
ni har
synpunkter
på hur kursen
fungerar.

Poll i Piazza (tre frågor) - SVARA ☺.

Senast: Kombinatorik.

Idag: Grafer. (inte grafer av funktioner!).

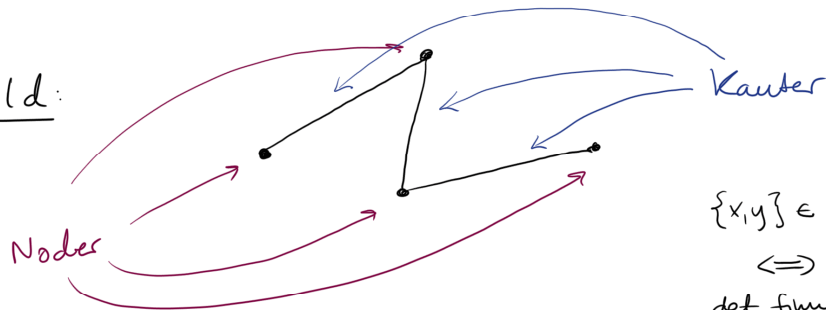
Grafer Fånga många grafbegrepp

Formellt: En graf består av en mängd V
av noder (vertices) och en mängd

$$E \subseteq \{ A \subseteq V \mid |A| = 2 \}$$

av kantar (edges).

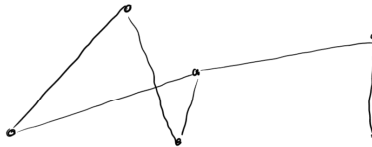
Bild:



$$\{x, y\} \in E$$

$\Leftrightarrow$

det finns en
kant mellan
x och y.



Mellan varje par av noder kan man dra
högst en kant.

Så  är inte tillåtet.

Också inte tillåtet med "öglor": 
(kantar som går från en nod till sig själv).

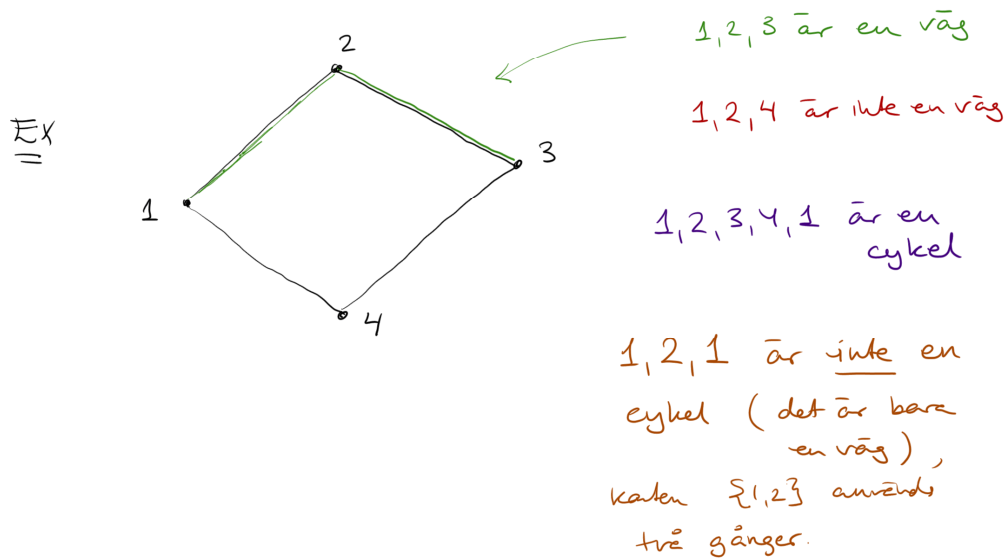
Ex Fyra noder



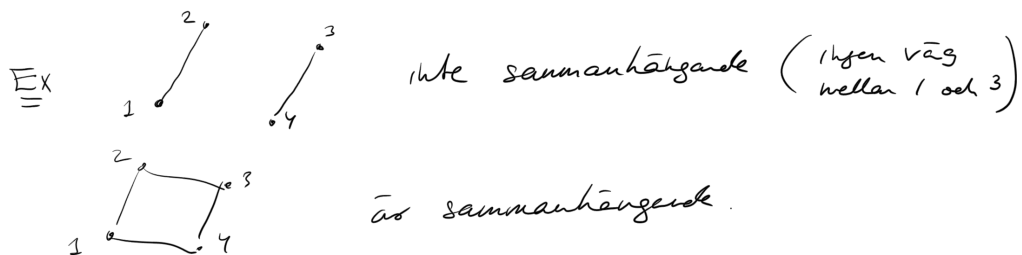
Skriver grafer $G = (V, E)$.

En väg i en graf $G = (V, E)$ är en följd
av noder $v_0, v_1, \dots, v_n$ så att det finns en
kant mellan v_i och v_{i+1} $\forall i: 0 \leq i \leq n-1$.
(dvs $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$).

En cykel är en väg $v_0, v_1, \dots, v_n$ med $v_0 = v_n$ och där inga kanter upprepas.

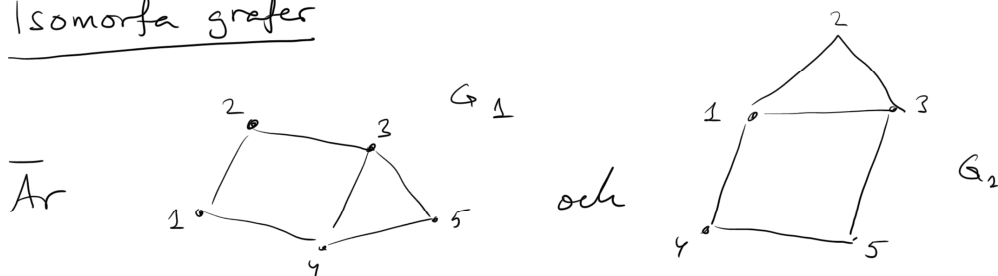


En graf är sammanhängande om det finns en väg mellan varje par av noder.



Kanter får korsas varandra.

Isomorfa grafer



Samma graf?

Samma nodmängd, men G_1 har ^{inte} en kant mellan 1 och 3,

vilket G_2 var.

Så de kanske är olika?

Fäst om vi plockar bort namnen på noderna har vi



är samma graf.

Trä grafer som är "samma om man döper om noderna" kallas för isomorfa (och räknas ofta som samma graf).

Formellt. $G_1 = (V_1, E_1)$ och $G_2 = (V_2, E_2)$

är isomorfa om det finns en bijektion

$f: V_1 \rightarrow V_2$ så att

$$\{x, y\} \in E_1 \iff \{f(x), f(y)\} \in E_2.$$

("f inducerar en bijektion från E_1 till E_2 ").

Delgrafer

$G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ grafer.

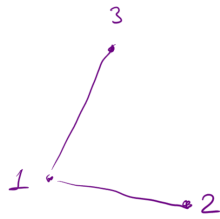
1) G' är en delgraf till G om $V' \subseteq V$
och $E' \subseteq E$.

2) G' är en inducerad delgraf till G om
 G' är en delgraf till G och ifall $x, y \in V'$
och $\{x, y\} \in E$, så är $\{x, y\} \in E'$.

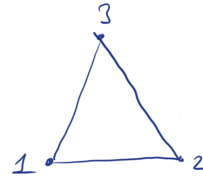
+..



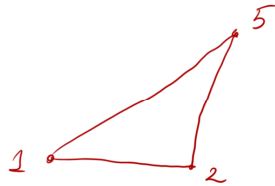
Ex



är en delgraf, men
inte en inducerad
delgraf ($\{2,3\}$ inte
en kant).



är en inducerad
delgraf.



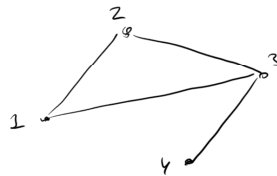
är inte en delgraf
($\{2,5\}$ finns inte i G)
 $\{1,5\}$ finns inte heller.

Gradtal: $G = (V, E)$ graf.

Låt $v \in V$ vara en nod. Gradtalet för v är

$d_v =$ antalet kanter i G vars ena nod är $v =$
 $=$ antalet noder länkade till v via en kant.

Ex



Nod	Gradtal
1	2
2	2
3	3
4	1

Summan
av alla
gradtal är
 $2+2+3+1 =$
 $= 8$, och
graden har
4 kanter.

Trä grundläggande resultat

Sats: $G = (V, E)$ graf. Då är

$$\sum_{v \in V} d_v = 2|E|$$

Bens: Varje kant $\{v, w\} \in E$ bidrar med 1
till d_v och 1 till d_w , med andra

$$\sum_{v \in V} d_v = 2|E|$$
 ord 2 till $\sum_{x \in V} d_x$

□

Följdsats (7.3 + 7.4 i boken) $G = (V, E)$ graf.

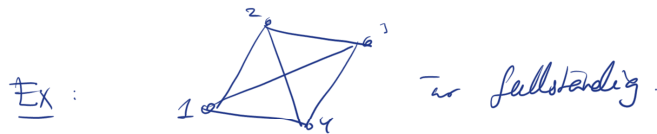
1) $\sum_{v \in V} d_v$ är jämnt.

2) Antalet $v \in V$ med d_v udda är jämnt.

Några olika sorters grafer

Fullständiga grafer

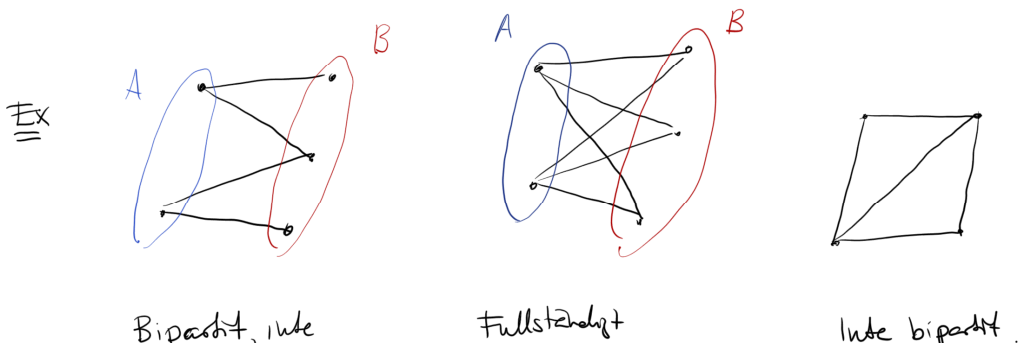
En graf är fullständig om det finns en kant mellan varje par av noder.



Bipartita grafer

En graf $G = (V, E)$ kallas bipartit om det finns delmängder $A, B \subseteq V$ med $A \cup B = V$, $A \cap B = \emptyset$ och varje kant i G har en nod i A och en nod i B .

Den kallas fullständigt bipartit om $\forall a \in A \forall b \in B$, $\{a, b\} \in E$.



fullständigt
bipartit.

bipartit.

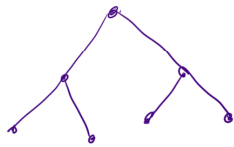
Ett annat sätt att tänka:

En graf är bipartit om jag kan färga noderna röda eller blå på ett sånt sätt att varje kant går mellan en röd och en blå nod.

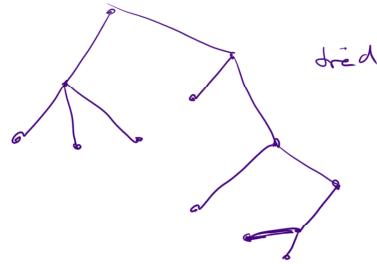
Träd

$G = (V, E)$ är ett träd om G är sammanhängande och inte innehåller några cykler.

Ex



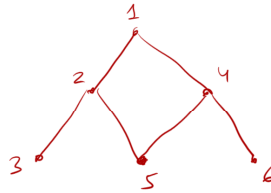
träd.



träd



inte ett träd, inte
sammanhängande.



är inte ett
träd
(finns cykel)
1, 2, 5, 4, 1.

Två resultat om träd:

Sats (7.6 i boken) $G = (V, E)$ är ett träd $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ mellan varje par $v, w \in V$ finns en unik
enkelt väg mellan v, w (enkelt väg =
= väg utan upprepade
noder)

Beside: Om det finns två olika vägar finns det
en cykel.

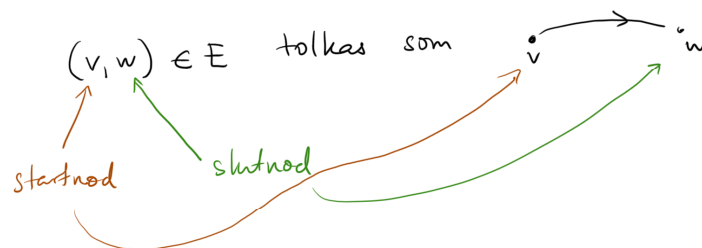
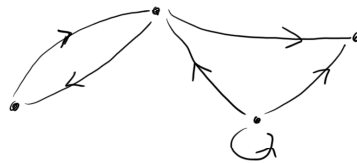
Sats (7.7 i boken) $G = (V, E)$ är ett träd $\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow G$ sammanhängande och $|E| = |V| - 1$.

Riktade grafer

Riktad graf = "graf med pilar på".

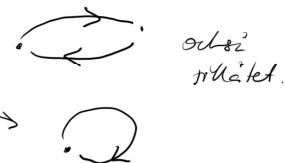
Formellt: $G = (V, E)$
 V mängd av noder,
 $E \subseteq V \times V$ mängd av riktade kanter

Bild:



Vi tillåter:

1) "Öglor"



Vi tillåter inte:

2) Mer än en kant med samma startnod och samma slutnod.



Vi har liknande begrepp som för "vanliga" grafer:

$G = (V, E)$

$$G = (V, E)$$

Riktad väg: $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$
 $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n) \in E$



Riktad cykel: Riktad väg $v_0, v_1, \dots, v_n$ med $v_0 = v_n$
där inga kanter upprepas.

G är sterkt sammanhängande om det finns en
riktad väg mellan varje ordnat par av noder.

Ex



inte sterkt samman-
hängande, kan inte
gå från 2 till 1.



sterkt sammanhängande.