

Föreläsning 8

Anteckning... TMV200 Föreläsningar

Skapad: 2020-11-24 13:12

Ändrad: 2020-11-24 15:01

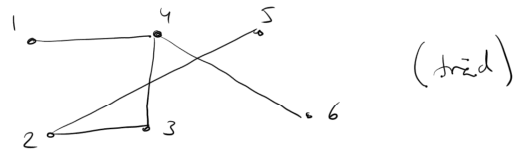
Författare: hchristian.johansson@gmail.com

TMV200 24/11-20

Sist: Grafer, riktade grafer.

Idag: Eulervägar, relationer

$G = (V, E)$ graf:



Väg: $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$ med $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$
för $0 \leq i \leq n-1$.

Ex: $1, 4, 3, 2, 5$ i grafen ovan.

Cykel: Väg $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$ med $v_0 = v_n$ och
inte har några upprepade kanter.
Grafen ovan har inga cykler.

Eulervägar och Eulercyklar

$G = (V, E)$ graf.

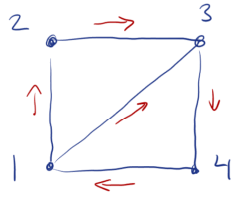
Def: En Eulerväg är en väg i G som innehåller
varje kant exakt en gång.

... slutar på samma

Om en Eulerväg börjar och slutar på samma
nod kallas den en Eulercykel.

(Övnings: Övertyga er om att en Eulercykel är
en cykel).

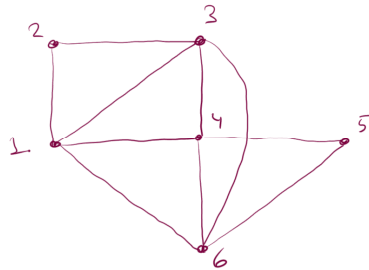
Ex:



Har en Eulerväg:

1, 3, 4, 1, 2, 3.

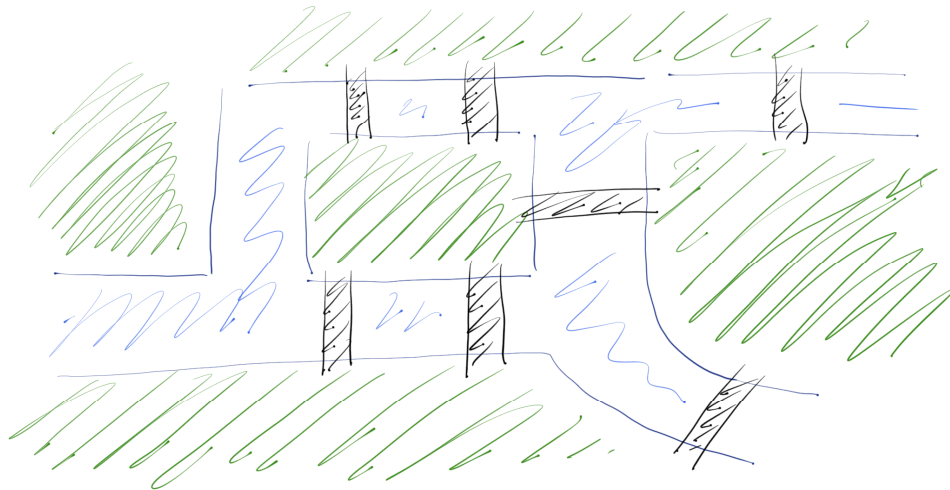
(finns ingen Eulercykel)



Har en Eulercykel

(visar detta senare,
alla gräddel är jämna).

Königsbergs broar



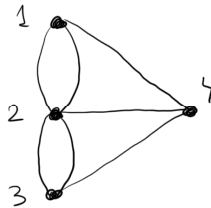
Kan man ta en promenad som går över varje
bro exakt en gång?

Euler (1736): Det går inte.

Gör om till grafteori:

Landmassor = noder
Broar = kanter.

Får



vi får

, en multigraf. (flera kanter
mellan samma
noder är
tillåtna.)

Söker en Eulerväg. Graddaten är 3, 5, 3, 3.

$G = (V, E)$ sammanhängande graf

Sats (7.11 i boken)

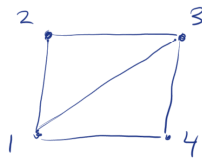
G innehåller (minst) en Eulercykel $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ alla graddatal i G är jämna.

Sats (7.12) Låt $v, w \in V$, $v \neq w$.

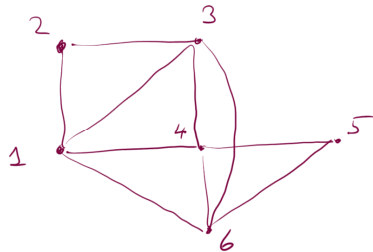
G innehåller (minst) en Eulerväg med start på v och slutar på w $\Leftrightarrow d_v$ och d_w udda, och alla andra graddatal skall vara jämna.

Ex:



$$d_1 = d_3 = 3, \quad d_2 = d_4 = 2.$$

Euligt andra satsen ovan finns en Eulerväg med start i 1 och slut i 3. (vi hittade en sån Eulerväg ovan).



$$d_1 = d_3 = d_4 = d_6 = 4$$

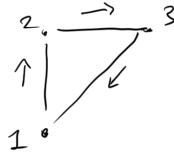
$$d_2 = d_5 = 2$$

Så enligt första satsen ovan finns en Eulercykel.

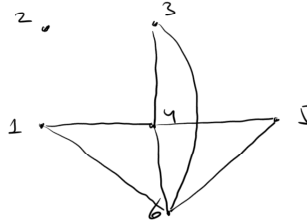
Hur kan man hitta en Eulercykel?

ett sätt: Hitta mindre cykler och "bygg på dem"

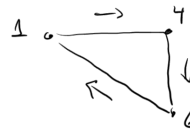
Börja med



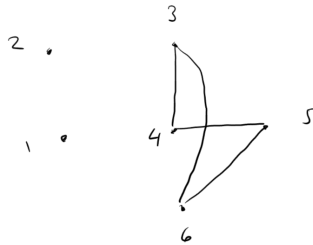
Ta nu bort dessa kanter: Får



Kan sen ta cykeln

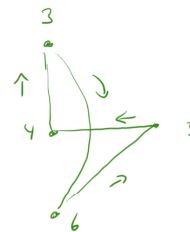
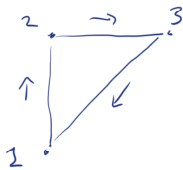


Ta bort den:



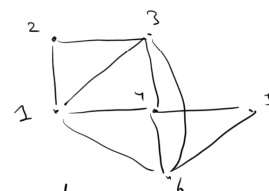
Detta är en cykel: 4, 3, 6, 5, 4

Kan nu lägga ihop alla dessa:



1, 2, 3, 1 = 1, 4 = 4, 3, 6, 5, 4 = 4, 6, 1

Det är en Eulerväg i vår "originalgraf"



Det här är idén bakom benämnet av 7.11 och 7.12 i boken.
(bra övning för induktionsbevis!)

Relationer

Vi pratade om de logiska relationer $\Rightarrow$ och $\Leftrightarrow$
på utsagor, samt mängdrelationerna $\subseteq$ och $=$.

Formell definition av en relation:

A, B mängder. En relation från A till B är en
delmängd $R \subseteq A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Hur tänker vi? Låt $a \in A, b \in B$

$(a, b) \in R$ tolkas "a är relaterat till b".
 $(a, b) \notin R$ tolkas "a är inte relaterat till b".

Ofta skriver man $a R b$ istället för $(a, b) \in R$.

Ofta är $A = B$.

Ex 1) $A = B = \mathbb{Z}$, kan definiera en relation
 $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ genom

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow a \leq b$$

2) $A = B = \text{utsagor}$, kan definiera en relation
 $R \subseteq A \times A$ genom

$$(P, Q) \in R \Leftrightarrow P \rightarrow Q \text{ är sann}$$

Detta är den logiska relationen $\Rightarrow$ från tidigare.

3) $A = \{\text{städer i Europa}\}$
 $B = \{\text{städer i Finland}\}$

$$B = \{\text{länder} : \dots\}$$

$$R \subseteq A \times B : (a, b) \in R \Leftrightarrow a \text{ ligger i } b.$$

$$(\text{Wien}, \text{Österrike}) \in R.$$

$$(\text{Göteborg}, \text{Norge}) \notin R.$$

- 4) Om $A = B$, så är en relation R på A samma sak som en riktad graf med nodmängd A och kantmängd R .



$$\text{Dvs: } (a, b) \in R \Leftrightarrow \text{Det finns en riktad kant } a \rightarrow b$$

Kan användas för att visualisera relationer:

$$5) \quad A = B = \{1, 2, 3\}$$



ger relationen

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\} \subseteq A \times A.$$

Egenskaper hos relationer

$A = B$ från och med nu, R relation på A .

R är:

- 1) reflexiv om $a R a \quad \forall a \in A$.
- 2) symmetrisk om $a R b \Rightarrow b R a \quad \forall a, b \in A$.
- 3) antisymmetrisk om $(a R b \wedge b R a) \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in A$.
- 4) transitiv om $(a R b \wedge b R c) \Rightarrow a R c \quad \forall a, b, c \in A$.

- 5) R är en partiell ordning om R är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv.

6) R är en ekvivalensrelation om R är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

Ex: $A = \{\text{städer i Europa}\}$.

$x R y \iff x$ och y ligger i samma land.

Då är R en ekvivalensrelation.