Föreläsning 12

Anteckning...	TMV200 Föreläsningar		
Skapad:	2020-12-02 07:56	**Ändrad:**	2020-12-02 09:56
Författare:	hchristian.johansson@gmail.com		

TMV200 2/12-20

Igår: Talteori: Delbarhet, sgd, Euklides algoritm.
Linjära diofantiska ekvationer.

Hur kan man hitta alla gemensamma delare till två $a, b \in \mathbb{Z}$?

OBS: Om d gemensam delare till a och b, så gäller att $d \mid \text{sgd}(a,b)$. Följer från Bezouts identitet.

Så $\{ d \mid d \mid a \wedge d \mid b \} = \{ d \mid d \mid \text{sgd}(a,b) \}$.

Idag:

Primtal:

Def: Ett heltal $p \geq 2$ kallas för ett primtal om

$$\forall a \in \mathbb{Z}_+ : \quad a \mid p \Rightarrow (a = 1 \vee a = p).$$

Ex $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$ är primtal

1 är inget primtal (per definition! primtal är ≥ 2).

$4 = 2 \cdot 2$, $15 = 3 \cdot 5$ är inte primtal.

Viktiga resultat om primtal:

Sats Det finns oändligt många primtal.

Sats (5.31) Om p är ett primtal och $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z}$ och $p \mid a_1 \cdots a_r$, så finns ett i så att $p \mid a_i$.

Sats (5.33) Varje heltal $n \geq 2$ kan skrivas som en produkt av primtal på ett unikt sätt (bortsett från ordningen av primtalen).

Ex $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 2$

Problem 1: Varje heltal ≥ 2 kan skrivas som en produkt av primtal.

(Se Exempel 4.6 i boken).

Använd stark induktion:

Basfall: $n = 2$ är ett primtal, så ok.

Induktionssteget: Låt $n \geq 3$. Antag att varje $m \in \mathbb{Z}$ med $2 \leq m < n$ kan skrivas som en produkt av primtal.

Om n är ett primtal så är det en produkt av primtal.

Om inte så är $n = ab$, med $a, b \in \mathbb{Z}$ och

$2 \leq a, b < n$. Enligt induktionsantagandet är

$a = p_1 \cdots p_r$ och $b = q_1 \cdots q_s$ för några primtal

$p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s$. Så

$n = ab = p_1 \cdots p_r q_1 \cdots q_s$ är en produkt av primtal.

Problem 2: Tåg går sönder.

Har $57x + 11$ passagerare, x = antalet sittvagnar.

Har också $52y + 9$ passagerare, y = antalet fyllda bussar.

Så $57x + 11 = 52y + 9$, dvs

$$57x - 52y = -2$$ (linjär diofantisk ekvation)

Steg 1: Hitta $\text{sgd}(57, 52)$

$$\begin{aligned} 57 &= 52 \cdot 1 + 5 \\ 52 &= 5 \cdot 10 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 1 \cdot 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{sgd} = 1.$$

Steg 2: Hitta m, n så att $57m + 52n = 1$

Gå baklänges:

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \cdot 2 = \\ &= 5 - (52 - 5 \cdot 10) \cdot 2 = \\ &= 5 \cdot 21 - 52 \cdot 2 = \\ &= (57 - 52) \cdot 21 - 52 \cdot 2 = \\ &= 57 \cdot 21 - 52 \cdot 23 \end{aligned}$$

Steg 3: Multiplicera med -2:

$57 \cdot (-42) - 52(-46) = -2$, ger en

Steg 4: Hitta alla lösningar

$x = -42 + 52m$, $y = -46 + 57m$

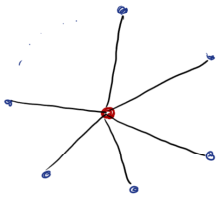
enligt Satsen från igår.

$m = 1$ ger $x = 10$, $y = 11$

$\Rightarrow$ $57x + 11 = 570 + 11 = 581$ passagerare.

Kan kontrollera att alla andra lösningar ger fler än 1000 passagerare.

Problem 3: $K_{1,n} =$



"n-stjärnan".

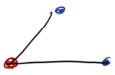
a) De blå noderna har gradtal 1, så inga Eulercykler.

Finns n st blå noder, dvs n noder med gradtal 1.

Om $n \geq 3$, finns det inga Eulervägar.

Om $n = 1$ eller $n = 2$ finns det Eulervägar

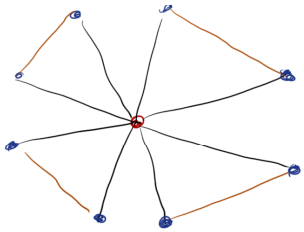
$n = 1$:

$n = 2$: 

b)

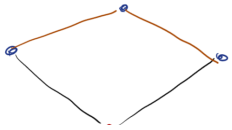
n jämn:

Lägg till $n/2$ st.



Lägg till de orangea kanterna

n udda:



Lágg till $\frac{n+1}{2}$ plocka bort 1.

