

Angående studio 6, uppgift 3

Vi har alltså problemet

$$u'(t) = Au(t), \quad (1)$$

där A är en 2×2 -matris som kan diagonaliseras. Vi löser ekvationen med hjälp av *basbyte*. Diagonalisera:

$$A = VDV^t \quad (2)$$

där V^t är transponatet av V . Som ni vet har V egenvektorerna till A som kolumner, d.v.s.

$$V = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}.$$

Dessutom är $V^{-1} = V^t$, så vi kan "transformera" hela ekvationen (1), så att

$$(V^t u)' = D(V^t u) = D(V^t u) \quad (3)$$

och vi får en ny ekvation $f' = Df$ i termer av $f = V^t u$. Den är mycket enklare, eftersom D är diagonal:

$$f' = \begin{bmatrix} f_1' \\ f_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

alltså, $f_1' = \lambda_1 f_1$ och $f_2' = \lambda_2 f_2$. (De okända f_1 och f_2 är inte *kopplade*.) Vi har

$$f_1' = \lambda_1 f_1 \implies f_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$$

och likaså för f_2 . För att få tillbaka u "transformerar vi tillbaka" via $f = V^t u$, eller ekvivalent, $u = Vf$. Vi har

$$u = Vf = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ v_1 \\ | \end{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} + \begin{bmatrix} | \\ v_2 \\ | \end{bmatrix} c_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (5)$$

Om vi skriver elementen som

$$\begin{bmatrix} | \\ v_1 \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (v_1)_1 \\ (v_1)_2 \end{bmatrix}$$

har vi med andra ord

$$u_1(t) = (v_1)_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + (v_2)_1 c_2 e^{\lambda_2 t},$$

samt likadant (med andra index) för u_2 .