MVE465

Lösningar på övningsuppgifter

December 1, 2021

Detta dokument innehåller mina renskrivna lösningar på övningsuppgifter i kursen *Linjär algebra och analys fortsättning* (MVE465). Jag har strukturerat dokumentet så att man först ser själva uppgiften på en sida, och på nästa sida står uppgiften tillsammans med dess lösning; detta gör det enkelt för er att själva prova på uppgifterna utan att ni råkar se delar av lösningen.

Jag kan inte lova att samtliga lösningar är välformulerade och pedagogiska, men förhoppningsvis är de flesta lösningar hjälpsamma. Dokumentet kommer naturligtvis att finslipas under kursens gång, i synnerhet vill jag lägga till fler bilder. /Jimmy

Utvalda godkäntuppgifter är understrukna.

Överbetygsuppgifter indikeras med en stjärna *.

Innehållsförteckning

Uppgifter ur Adams & Essex

Läsvecka 1, Övning 1

Problem 5.3.6.

Betrakta funktionen

$$f(x) = \cos x, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Partitionera intervallet i $n = 4$ stycken lika stora delintervall P_n av längd $2\pi/n$. Utvärdera den lägre Riemann-summan $L(f, P_n)$ och den övre Riemann-summan $U(f, P_n)$.

Problem 5.3.6.

Betrakta funktionen

$$f(x) = \cos x, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Partitionera intervallet i $n = 4$ stycken lika stora delintervall P_n av längd $2\pi/n$. Utvärdera den lägre Riemann-summan $L(f, P_n)$ och den övre Riemann-summan $U(f, P_n)$.

Lösning: Vi är alltså intresserade av delintervallen

$$P_1 = [0, \pi/2], \qquad P_2 = [\pi/2, \pi], \qquad P_3 = [\pi, 3\pi/2], \qquad P_4 = [3\pi/2, 2\pi].$$

Vi har plottat funktionen $f(x) = \cos(x)$ och de fyra delintervallen i Figur 1. Vi ser tydligt att funktionen antingen ökar eller minskar på varje delintervall, vilket innebär att minimipunkterna och maximipunkterna finnes i delintervallens ändpunkter:

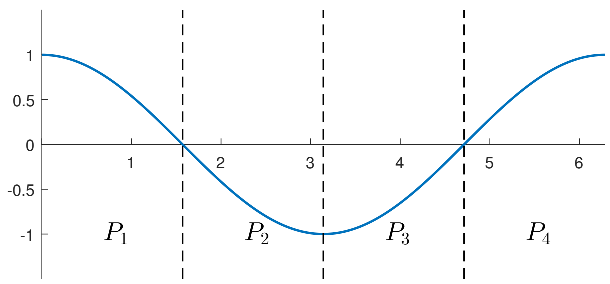
$$\begin{array}{lll} P_1: & l_1 = \pi/2, & u_1 = 0 \\ P_2: & l_2 = \pi, & u_2 = \pi/2 \\ P_3: & l_3 = \pi, & u_3 = 3\pi/2 \\ P_4: & l_4 = 3\pi/2, & u_4 = 2\pi \end{array}$$

Eftersom alla delintervall har samma längd $\Delta x = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ får vi den lägre Riemann-summan

$$L(f, P_n) = \sum_{i=1}^{4} \cos(l_i)\Delta x = \Big(\cos(\pi/2) + \cos(\pi) + \cos(\pi) + \cos(3\pi/2)\Big)\Delta x =$$
$$= \Big(0 - 1 - 1 + 0\Big)\frac{\pi}{2} = -\pi,$$

och den övre Riemann-summan

$$U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{4} \cos(u_i)\Delta x = \Big(\cos(0) + \cos(\pi/2) + \cos(3\pi/2) + \cos(2\pi)\Big)\Delta x =$$
$$= \Big(1 + 0 + 0 + 1\Big)\frac{\pi}{2} = \pi.$$



Figur 1: Grafen till funktionen $f(x) = \cos(x)$ indelad i de fyra delintervallen P_1, P_2, P_3, P_4. Vi ser att minimum och maximum för varje intervall finnes i respektive intervalls ändpunkter.

Problem 5.3.14

Uttryck gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\ln\left(1+\frac{2i}{n}\right)$$

som en integral.

Problem 5.3.14

Uttryck gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\ln\left(1+\frac{2i}{n}\right)$$

som en integral.

Lösning: Kom ihåg att integraler definieras som gränsvärden

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i,$$

Vi börjar därför med att skriva om summan i uppgiften på formen

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

Om vi sätter $x_i = \frac{2i}{n}$ så blir längden på varje delintervall $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{2i}{n} - \frac{2(i-1)}{n} = \frac{2}{n}$, och eftersom denna längd är oberoende av indexet i så gör vi oss av med det: $\Delta x = \frac{2}{n}$. Summan blir då

$$\sum_{i=1}^{n}\ln\Big(1+x_i\Big)\Delta x \quad\to\quad \int_a^b \ln(1+x)\ \mathrm{d}x, \qquad (n\to\infty).$$

Det enda som återstår nu är att hitta integrationsgränserna a och b:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0, \qquad \text{och} \qquad b = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n} = 2.$$

Vi drar slutsatsen att

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\ln\left(1+\frac{2i}{n}\right) = \int_0^2 \ln(1+x)\ \mathrm{d}x.$$

Problem 5.4.2

Förenkla uttrycket

$$\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x + \int_1^3 3f(x)\ \mathrm{d}x - \int_0^3 2f(x)\ \mathrm{d}x - \int_1^2 3f(x)\ \mathrm{d}x \tag{1}$$

Problem 5.4.2

Förenkla uttrycket

$$\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x + \int_1^3 3f(x)\ \mathrm{d}x - \int_0^3 2f(x)\ \mathrm{d}x - \int_1^2 3f(x)\ \mathrm{d}x \tag{2}$$

Lösning: Kom ihåg att integralen av en funktion över ett intervall $[a, b]$ ger arean mellan x-axeln och funktionens graf i detta intervall. Om två integraler $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ och $\int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x$ har samma integrand $f(x)$ och de två intervallen $[a, b]$, $[b, c]$ ligger precis bredvid varandra (utan överlapp) så kan vi lägga ihop de två integralerna till en:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Detta betyder helt enkelt att den totala arean hos två separata regioner är lika med summan av respektive regions area. Se Figur 2.

Vi börjar med att subtrahera den fjärde integralen från den första integralen:

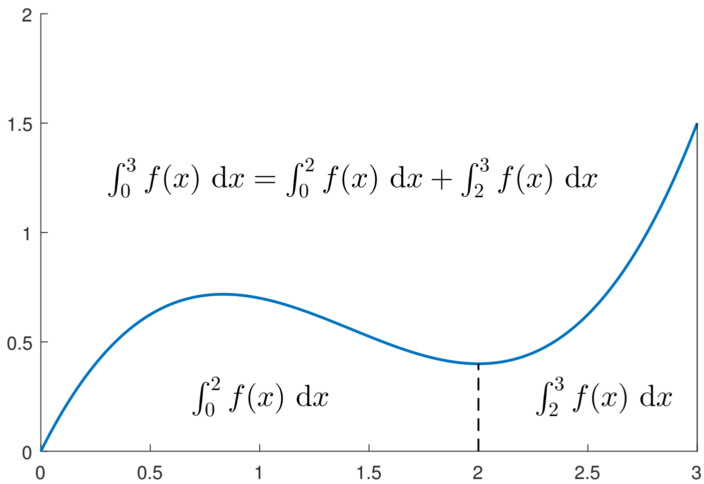
$$\int_0^2 3f(x)\ \mathrm{d}x - \int_1^2 3f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 3f(x)\ \mathrm{d}x$$

Eftersom denna integral täcker intervallet $[0, 1]$ och den andra integralen i ekvation (2) täcker intervallet $[1, 3]$, och de två integralerna har samma integrand, så kan vi addera dem:

$$\int_0^1 3f(x)\ \mathrm{d}x + \int_1^3 3f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^3 3f(x)\ \mathrm{d}x$$

Det enda som återstår är att subtrahera den tredje termen i ekvation (2):

$$(2) = \int_0^3 3f(x)\ \mathrm{d}x - \int_0^3 2f(x)\ \mathrm{d}x = 3 * \int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x - 2 * \int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x.$$



Figur 2: Arean mellan x-axeln och grafen till $f(x)$ i intervallet $[0, 3]$ kan fås genom att beräkna arean över delintervallen $[0, 2]$ och $[2, 3]$ var för sig, och sedan summera de två areorna. Detta faktum kan skrivas i termer av integraler som $\int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\ \mathrm{d}x$.

Problem 5.4.6

Utvärdera integralen

$$\int_{-1}^{2} (1 - 2x)\, \mathrm{d}x$$

genom att tolka integralen i termer av areor.

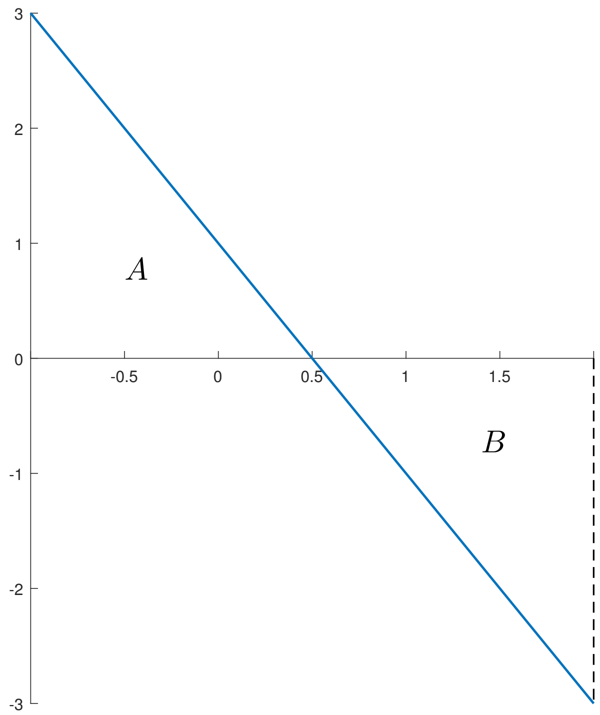
Problem 5.4.6

Utvärdera integralen

$$\int_{-1}^{2} (1 - 2x)\, \mathrm{d}x$$

genom att tolka integralen i termer av areor.

Lösning: Vi börjar med att plotta funktionen:



Figur 3

Som vi ser kan regionen mellan x-axeln och grafen delas in i två stycken trianglar A och B. Integralen är summan av dessa två trianglars areor, men eftersom triangeln B ligger nedanför x-axeln kommer dess area att räknas negativt:

$$\int_{-1}^{2} (1 - 2x)\, \mathrm{d}x = \text{area}(A) - \text{area}(B) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0.$$

Problem 5.4.12*

Utvärdera integralen

$$\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\,\mathrm{d}x$$

genom att tolka integralen i termer av areor.

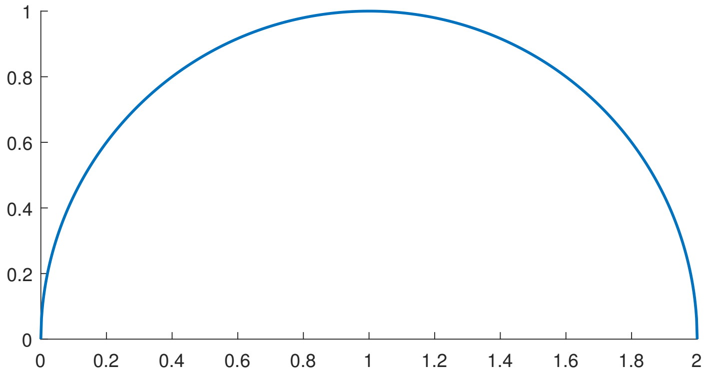
Problem 5.4.12*

Utvärdera integralen

$$\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\ \mathrm{d}x$$

genom att tolka integralen i termer av areor.

Lösning: Vi börjar med att plotta funktionen:



Figur 4

Som vi ser bildar denna graf en halvcirkel med radie $r = 1$, så

$$\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\ \mathrm{d}x = \text{area}(\mathit{halvcirkel}) = \frac{1}{2} * \pi r^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Problem 5.4.34*

Beräkna integralen

$$\int_{-3}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x$$

där den styckvis kontinuerliga funktionen f ges av

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x\ , & x < 0 \\ 2\ , & x \geq 0 \end{cases}$$

Problem 5.4.34*

Beräkna integralen

$$\int_{-3}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x$$

där den styckvis kontinuerliga funktionen f ges av

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x\ , & x < 0 \\ 2\ , & x \geq 0 \end{cases}$$

Lösning: Vi delar upp integralen i två delar som låter oss utvärdera funktionen på varje del:

$$\int_{-3}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} (1 + x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} 2\ \mathrm{d}x.$$

Vi kan beräkna de två integralerna var för sig genom att plotta funktionerna, så som vi har gjort i tidigare uppgifter. Om man gör detta så får man att

$$\int_{-3}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{5}{2}.$$

Problem 5.5.4

Beräkna integralen

$$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) \, \mathrm{d}x.$$

Problem 5.5.4

Beräkna integralen

$$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) \mathrm{d}x.$$

Lösning: Vi skriver om integranden med hjälp av negativa exponenter,

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = x^{-2} - x^{-3},$$

och använder deriveringsregeln $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = n x^{n-1}$ baklänges på respektive term för att hitta den primitiva funktionen:

$$F(x) = -x^{-1} + \frac{1}{2} x^{-2} + C = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C.$$

Integralen har därför värdet

$$\int_{-2}^{-1} x^{-2} - x^{-3} \, \mathrm{d}x = F(-1) - F(-2) = \left(1 + \frac{1}{2} + C \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + C \right) = \frac{7}{8}.$$

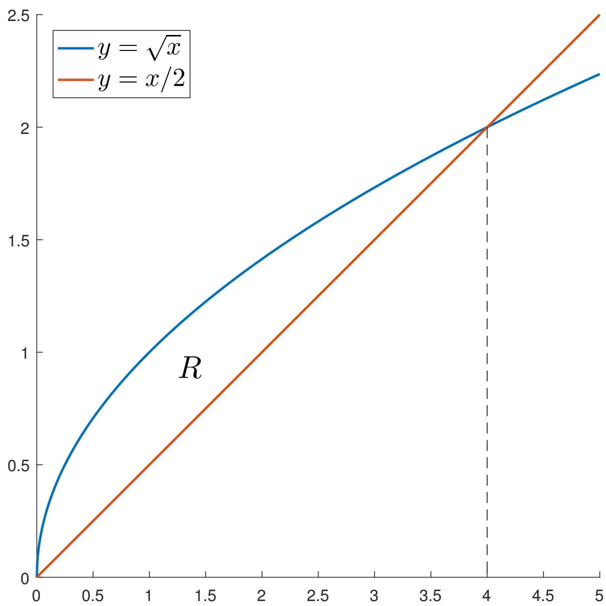
Problem 5.5.26

Beräkna arean av den region R som ligger under grafen $y = \sqrt{x}$ och över grafen $y = \frac{x}{2}$.

Problem 5.5.26

Beräkna arean av den region R som ligger under grafen $y = \sqrt{x}$ och över grafen $y = \frac{x}{2}$.

Lösning: Vi börjar med att plotta de två graferna för att se hur regionen R ser ut.



Vi ser att de två graferna skär varandra i punkterna $x = 0$ och $x = 4$, så dessa är våra integrtionsgränser. Arean av regionen R kan nu beräknas via följande process:

Steg 1. Beräkna arean mellan grafen $y = \sqrt{x}$ och x-axeln, det vill säga beräkna integralen

$$\int_0^4 \sqrt{x}\ \mathrm{d}x,$$

Steg 2. Beräkna arean mellan grafen $y = x/2$ och x-axeln, det vill säga beräkna integralen

$$\int_0^4 x/2\ \mathrm{d}x,$$

Steg 3. Notera att arean av regionen R är arean i **Steg 1.** minus arean i **Steg 2.**

$$\text{area}(R) = \int_0^4 \sqrt{x}\ \mathrm{d}x - \int_0^4 x/2\ \mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^4 = \frac{4}{3}.$$

Problem 5.5.42*

Beräkan derivatan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2 \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u} \; \mathrm{d}u$$

Problem 5.5.42*

Beräkan derivatan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2 \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u$$

Lösning: Integralkalkylens huvudsats säger att

$$\int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u = F(x^2) - F(0),$$

där $F(u)$ är en primitiv funktion till $f(u) = \frac{\sin u}{u}$. Produktregeln för derivator ger nu att

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2 \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2 \Big(F(x^2) - F(0) \Big) = \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2 \right) \Big(F(x^2) - F(0) \Big) + x^2 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Big(F(x^2) - F(0) \Big) \right) = \\
&= 2x \Big(F(x^2) - F(0) \Big) + x^2 \Big(2x f(x^2) - 0 \Big) = \\
&= 2x \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u + 2x^3 \frac{\sin\big(x^2\big)}{x^2} = \\
&= 2x \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u + 2x \sin x^2.
\end{aligned}$$

Mer än såhär kan vi inte förenkla, då den primitiva funktionen $F(u)$ inte har något enkelt uttryck.

Problem 2.10.6

Beräkna den indefinita integralen

$$\int x + \cos x \, \mathrm{d}x$$

Problem 2.10.6

Beräkna den indefinita integralen

$$\int x + \cos x \, \mathrm{d}x$$

Lösning: Uppgiften är med andra ord att finna en primitiv funktion till $f(x) = x + \cos x$, dvs. en funktion vars derivata är $f(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin x + C.$$

Problem 2.10.8

Beräkna den indefinita integralen

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$$

Problem 2.10.8

Beräkna den indefinita integralen

$$\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Lösning: Uppgiften är med andra ord att beräkna en primitiv funktion till $f(x) = \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}$. Ett sätt är att hitta lösningen är att dela upp funktionen i två delar,

$$f(x) = \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\cos^3 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x,$$

och använda en lista över derivator av trigonometriska funktioner för att se att $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x$. Det följer att

$$\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x\,\mathrm{d}x = \tan x + \sin x + C.$$

Problem 2.10.26

Använd trigonometriska identiteter som

$$\begin{cases} \sec^2 x = 1 + \tan^2 x, \\ \sin(2x) = 2\sin x \cos x, \\ \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

för att beräkna den indefinita integralen

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$$

Problem 2.10.26

Använd trigonometriska identiteter som

$$\begin{cases} \sec^2 x = 1 + \tan^2 x, \\ \sin(2x) = 2\sin x \cos x, \\ \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

för att beräkna den indefinita integralen

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$$

Lösning: Låt oss använda den sistnämnda identiteten, som kan skrivas om på formen

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}.$$

Det följer att

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C.$$

Läsvecka 2, Övning 1

Problem 5.6.4

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int e^{2x} \sin\left(e^{2x}\right)\, \mathrm{d}x.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Problem 5.6.4

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int e^{2x} \sin\left(e^{2x}\right)\, \mathrm{d}x.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Lösning: När man stöter på såna här uppgifter vill man göra en variabelsubstitution $u = g(x)$, för något $g(x)$, som förenklar integranden genom att baka in någon del av integranden i termen

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x.$$

Vi gör variabelsubstitutionen $u = e^{2x}$, för då försvinner faktorn e^{2x} ur integranden:

$$\int e^{2x} \sin\left(e^{2x}\right)\, \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = e^{2x} \\ \mathrm{d}u = 2e^{2x}\, \mathrm{d}x \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \sin u\, \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos\left(e^{2x}\right) + C.$$

Problem 5.6.16

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{x^2}{2 + x^6} \, \mathrm{d}x.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Problem 5.6.16

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{x^2}{2+x^6}\,\mathrm{d}x.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Lösning: Hur tänker man när man löser en sån här uppgift? Jag tänker att jag vill bli av med faktorn x^2 i täljaren, för man kan nog inte enkelt bli av med nämnaren. Så låt oss sätta $u = x^3$.

$$\int \frac{x^2}{2+x^6}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = x^3 \\ \mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \frac{1}{3}\int \frac{1}{2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Integralen påminner mycket om derivatan för arctan, vi behöver bara göra om tvåan i nämnaren till en etta. Ett sätt att göra detta är via en till variabelsubstitution som byter ut u^2 mot $2v^2$, varefter vi kan faktorisera ut en tvåa från hela nämnaren.

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{2+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\begin{array}{c} v = u/\sqrt{2} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}u/\sqrt{2} \end{array}\right] = \frac{\sqrt{2}}{3}\int \frac{1}{2+2v^2}\,\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan v + C = \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^3}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Problem 5.6.18*

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}}.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Problem 5.6.18*

Utvärdera den indefinita integralen
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}}.$$
Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Lösning: Det är inte uppenbart hur man löser denna uppgift, så låt oss helt enkelt testa något och se vad som händer.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x\ \mathrm{d}x}{e^{2x} + 1} = \begin{bmatrix} u = e^x \\ \mathrm{d}u = e^x\ \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 1} = \arctan u + C = \arctan e^x + C.$$

I det här fallet gick vårt experiment bra, men ibland får man testa flera olika saker innan man hittar en fungerande approach.

Problem 5.6.42*

Utvärdera integralen

$$\int_{\pi/4}^{\pi} \sin^5 x \; \mathrm{d}x.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Problem 5.6.42*

Utvärdera integralen

$$\int_{\pi/4}^{\pi} \sin^5 x \ \mathrm{d}x.$$

Notera att ditt svar kan skilja sig från bokens svar på grund av olika val av integrationskonstant.

Lösning: Låt oss skriva om integranden med hjälp av trigonometriska ettan:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

vilket också kan skrivas som $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Vi kan därför göra omskrivningen

$$\sin^5 x = \sin^4 x \sin x = (\sin^2 x)^2 \sin x = \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x,$$

vilket ger integralen

$$\int_{\pi/4}^{\pi} \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x \ \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = \cos x \\ \mathrm{d}u = -\sin x \ \mathrm{d}x \end{array} \right] = -\int_{1/\sqrt{2}}^{-1} (1 - u^2)^2 \ \mathrm{d}u = \int_{-1}^{1/\sqrt{2}} (1 - u^2)^2 \ \mathrm{d}u.$$

De nya integrationsgränserna är $u = \cos \pi/4 = 1/\sqrt{2}$ sam $u = \cos \pi = -1$, och vi har bytt ordning på dem så att vi integrerar från -1 tilll $1/\sqrt{2}$. Att byta ordning på integrationsgränserna inför ett minustecken som tar ut minustecknet från $\mathrm{d}u = -\sin x \ \mathrm{d}x$, så ovanstående ekvation är korrekt och vi kan nu beräkna integralen:

$$\int_{-1}^{1/\sqrt{2}} (1 - u^2)^2 \ \mathrm{d}u = \int_{-1}^{1/\sqrt{2}} 1 - 2u^2 + u^4 \ \mathrm{d}u = \left[u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 \right]_{-1}^{1/\sqrt{2}} = \frac{43}{60\sqrt{2}} + \frac{8}{15}.$$

Problem 5.7.6

Sketcha och beräkna arean hos den region som bestäms av kurvorna

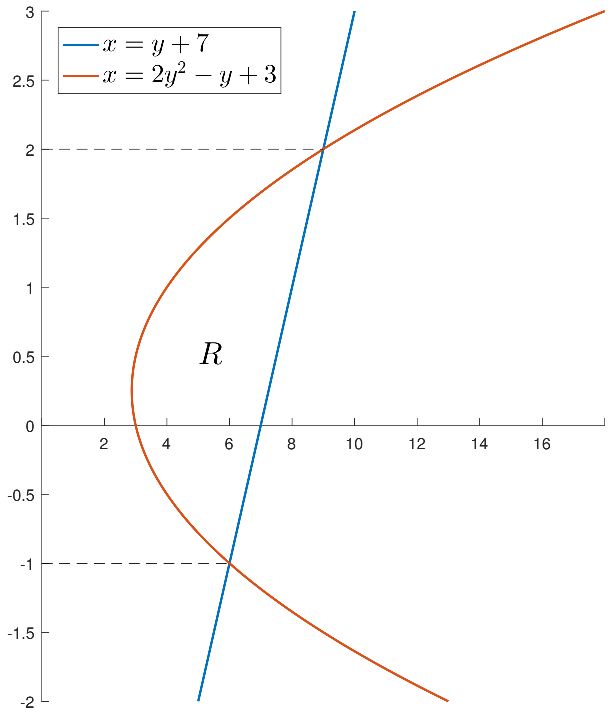
$$x - y = 7, \qquad x = 2y^2 - y + 3.$$

Problem 5.7.6

Sketcha och beräkna arean hos den region som bestäms av kurvorna

$$x - y = 7, \qquad x = 2y^2 - y + 3.$$

Lösning: Vi börjar med att sketcha de två kurvorna, för att se hur regionen i fråga ser ut:



Figur 5

Vi vet att en integral på formen $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ger arean mellan grafen till $f(x)$ och x-axeln, i intervallet $a \le x \le b$. På samma sätt ger integralen $\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$ arean mellan grafen till $f(y)$ och y-axeln, i intervallet $a \le y \le b$. Vi kan därför beräkna arean av regionen R genom att först beräkna arean till vänster om linjen $f(y) = y + 7$ och sedan subtrahera arean till vänster om kurvan $g(y) = 2y^2 - y + 3$:

$$\text{area}(R) = \int_a^b 7 + y\,\mathrm{d}y - \int_a^b 2y^2 - y + 3\,\mathrm{d}y = \int_a^b (7 + y) - (2y^2 - y + 3)\,\mathrm{d}y,$$

där integrationsgränserna a, b är de två punkter där kurvorna skär varandra:

$$7 + y = 2y^2 - y + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 - y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -1,\ y = 2.$$

Arean är alltså

$$\text{area}(R) = \int_{-1}^{2} -2y^2 + 2y + 4\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{2}{3}y^3 + y^2 + 4y\right]_{-1}^{2} = 9.$$

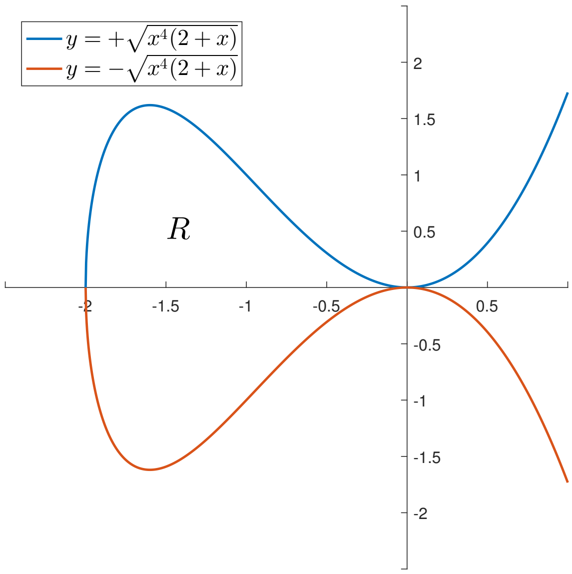
Problem 5.7.28

Beräkna arean hos den region R som innesluts av loopen $y^2 = x^4(x + 2)$ och som ligger till vänster om origo.

Problem 5.7.28

Beräkna arean hos den region R som innesluts av loopen $y^2 = x^4(x+2)$ och som ligger till vänster om origo.

Lösning: Vi börjar med att sketcha regionen i fråga för att se hur den ser ut. Notera att loopen utgörs av de två graferna $y = +\sqrt{x^4(2+x)}$ och $y = -\sqrt{x^4(2+x)}$.



Figur 6

Som vi ser är regionen symmetrisk kring x-axeln, vilket innebär att halva arean ligger ovanför x-axeln och halva arean ligger nedanför. Det räcker därför att beräkna arean hos den övre halvan och sedan multiplicera med 2:

$$\begin{aligned}
\text{area}(R) &= 2\int_{-2}^{0} \sqrt{x^4(2+x)}\ \mathrm{d}x = 2\int_{-2}^{0} x^2\sqrt{2+x}\ \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u^2 = 2+x \\ 2u\ \mathrm{d}u = \mathrm{dx} \end{array}\right] = \\
&= 2\int_{0}^{\sqrt{2}} (u^2-2)^2 u * 2u\ \mathrm{d}u = 4\int_{0}^{\sqrt{2}} u^6 - 4u^4 + 4u^2\ \mathrm{d}u = \\
&= 4\left[\frac{1}{7}u^7 - \frac{4}{5}u^5 + \frac{4}{3}u^3\right]_0^{\sqrt{2}} = 4\left(\frac{\sqrt{128}}{7} - \frac{4\sqrt{32}}{5} + \frac{4\sqrt{8}}{3}\right) = \frac{256\sqrt{2}}{105}.
\end{aligned}$$

Problem 6.1.2

Beräkna integralen
$$\int (x+3)e^{2x}\ \mathrm{d}x.$$

Problem 6.1.2

Beräkna integralen

$$\int (x+3)e^{2x}\ \mathrm{d}x.$$

Lösning: Vi sätter

$$U(x) = x+3, \qquad V(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

och partialintegrerar:

$$\begin{aligned}
\int (x+3)e^{2x}\ \mathrm{d}x = \int U(x)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x &= U(x)V(x) - \int \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}V(x)\ \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2}(x+3)e^{2x} - \frac{1}{2}\int 1 * e^{2x}\ \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2}(x+3)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.
\end{aligned}$$

Problem 6.1.8

Beräkna integralen

$$\int x^2 \arctan x \, \mathrm{d}x.$$

Problem 6.1.8

Beräkna integralen

$$\int x^2 \arctan x \; \mathrm{d}x.$$

Lösning: Vi sätter

$$U(x) = \frac{1}{3}x^3, \qquad V(x) = \arctan x$$

och partialintegrerar:

$$\begin{aligned}\int x^2 \arctan x \; \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} V(x) \; \mathrm{d}x = U(x)V(x) - \int U(x) \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \; \mathrm{d}x &= \\ = \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int x^3 * \frac{1}{1+x^2} \; \mathrm{d}x &= \\ = \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) \; \mathrm{d}x &= \\ = \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln\bigl(1+x^2\bigr) + C&.\end{aligned}$$

Problem 6.1.14*

Beräkna integralen

$$\int xe^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x.$$

Problem 6.1.14*

Beräkna integralen

$$\int xe^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x.$$

Lösning: Denna uppgift är lite lurig, det känns naturligt att sätta $U(x) = x$ och $V(x) = e^{\sqrt{x}}$ men detta kommer inte fungera. Istället gör vi en variabelsubstitution:

$$\int xe^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u^2 = x \\ 2u\ \mathrm{d}u = \ \mathrm{d}x \end{bmatrix} = 2\int u^3e^u\ \mathrm{d}u = 2I_3,$$

där

$$\begin{aligned} I_n = \int u^ne^u\ \mathrm{d}u &= \begin{bmatrix} U = u^n, & V = e^u \\ \mathrm{d}U = nu^{n-1}\ \mathrm{d}u, & \mathrm{d}V = e^u\ \mathrm{d}u \end{bmatrix} = \\ &= \int U\ \mathrm{d}V = U(u)V(u) - \int V\ \mathrm{d}U = u^ne^u - nI_{n-1}. \end{aligned}$$

Vi får då att

$$\begin{aligned} &I_0 = e^u \\ \Rightarrow\ &I_1 = ue^u - e^u = (u-1)e^u \\ \Rightarrow\ &I_2 = u^2e^u - 2(u-1)e^u = (u^2 - 2u + 2)e^u \\ \Rightarrow\ &I_3 = u^3e^u - 3(u^2 - 2u + 2)e^u = (u^3 - 3u^2 + 6u - 6)e^u \end{aligned}$$

Svaret är med andra ord

$$\int xe^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = 2(x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - 6)e^{\sqrt{x}}.$$

Problem 6.3.2*

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Problem 6.3.2*

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Lösning: När man ser ett uttryck på formen $\sqrt{1-g(x)^2}$ så är det ofta användbart att tänka på trigonometriska ettan:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad\Longleftrightarrow\quad \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}.$$

Man kan därför testa att göra variabelsubstitutionen $g(x) = \sin u$, vilket i vårt fall blir $2x = \sin u$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} 2x = \sin u \\ 2\ \mathrm{d}x = \cos u\ \mathrm{d}u \end{bmatrix} &= \int \frac{\frac{1}{4}\sin^2 u}{\cos u} * \frac{1}{2}\cos u\ \mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{8}\int \sin^2 u\ \mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{16}\int (1-\cos 2u)\ \mathrm{d}u = \\
&= \frac{u}{16} - \frac{\sin 2u}{32} + C = \\
&= \frac{1}{16}\arcsin 2x - \frac{1}{16}\sin u\cos u + C = \\
&= \frac{1}{16}\arcsin 2x - \frac{1}{8}x\sqrt{1-4x^2} + C.
\end{aligned}$$

Problem 6.3.5*

Utvärdera den indefinita integralen
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{9-x^2}}.$$

Problem 6.3.5*

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{9-x^2}}.$$

Lösning: I detta fall sätter vi $x = 3\sin\theta$ för att roten i nämnaren ska bli $3\cos\theta$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \begin{bmatrix} x = 3\sin\theta \\ \mathrm{d}x = 3\cos\theta\ \mathrm{d}\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta} = -\frac{1}{9}\cot\theta + C = -\frac{1}{9}\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C.$$

Problem 6.3.44*

Använd substitutionen $x = \tan(\theta/2)$ för att beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + \cos\theta + \sin\theta}.$$

Problem 6.3.44*

Använd substitutionen $x = \tan(\theta/2)$ för att beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + \cos\theta + \sin\theta}.$$

Lösning: Vi gör helt enkelt som uppgiften säger. Kom ihåg relationen mellan tan, cos, och sin,

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

vilket kan användas för att hitta uttryck för $\cos\theta$ och $\sin\theta$ i termer av $x = \tan(\theta/2)$:

$$x^2 = \tan^2(\theta/2) = \frac{\sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)} = \frac{1 - \cos^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)} = \frac{1}{\cos^2(\theta/2)} - 1.$$

Genom att kasta om termerna i denna ekvation, samt tillämpa formeln för halva vinkeln[1], får vi

$$\frac{1}{1 + x^2} = \cos^2(\theta/2) = [\text{halva vinkeln}] = \frac{1 + \cos\theta}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta = 1 - \frac{2}{1 + x^2} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

Att extrahera ett uttryck för $\sin\theta$ är enklare, tack vare trigonometriska ettan:

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{4x^2}{(1 + x^2)^2}} = \pm\frac{2x}{1 + x^2}.$$

Dessutom är $\sin\theta$ ickenegativt på det aktuella intervallet $\theta \in [0, \pi/2]$, så vi kan sudda ut $\pm$ ovan. Det följer att

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + \cos\theta + \sin\theta} = \left[\begin{array}{ll} x = \tan\frac{\theta}{2}, & \cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \\ \mathrm{d}\theta = \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, & \sin\theta = \frac{2x}{1+x^2} \end{array}\right] = \\
&= \int_0^1 \frac{\left(\frac{2}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x}{1 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)} = \\
&= \int_0^1 \frac{\left(\frac{2}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x}{\left(\frac{(1+x^2)+(1-x^2)+(2x)}{1+x^2}\right)} = \\
&= \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}x}{(1 + x^2) + (1 - x^2) + (2x)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + x} = \Big[\ln|1 + x|\Big]_0^1 = \ln 2.
\end{aligned}$$

[1] `https://sv.wikipedia.org/wiki/Lista_%C3%B6ver_trigonometriska_identiteter#Halva_vinkeln`

vilket kan användas för att hitta uttryck för $\cos\theta$ och $\sin\theta$ i termer av $x = \tan(\theta/2)$:

$$x^2 = \tan^2(\theta/2) = \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} = \frac{1-\sin^2(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} = \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} - 1.$$

Genom att kasta om termerna i denna ekvation, samt tillämpa formeln för halva vinkeln[2], får vi

$$\frac{1}{1+x^2} = \sin^2(\theta/2) = [\text{halva vinkeln}] = \frac{1-\cos\theta}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Att extrahera ett uttryck för $\sin\theta$ är enklare, tack vare trigonometriska ettan:

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}} = \pm\frac{2x}{1+x^2}.$$

Dessutom är $\sin\theta$ ickenegativt på det aktuella intervallet $\theta \in [0, \pi/2]$, så vi kan sudda ut $\pm$ ovan. Det följer att

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta} &= \left[\begin{array}{cc} x = \tan\frac{\theta}{2}, & \cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \\ \mathrm{d}\theta = \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, & \sin\theta = \frac{2x}{1+x^2} \end{array}\right] = \\
&= \int_0^1 \frac{\left(\frac{2}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)+\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)} = \\
&= \int_0^1 \frac{\left(\frac{2}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x}{\left(\frac{(1+x^2)+(1-x^2)+(2x)}{1+x^2}\right)} = \\
&= \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)+(1-x^2)+(2x)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \Big[\ln|1+x|\Big]_0^1 = \ln 2.
\end{aligned}$$

[2]https://sv.wikipedia.org/wiki/Lista_%C3%B6ver_trigonometriska_identiteter#Halva_vinkeln

Läsvecka 2, Övning 2

Problem 7.1.6

Låt R vara den tvådimensionella yta som begränsas av kurvorna $y = x$ och $y = x^2$. Beräkna volymen av den solid som erhålles om vi roterar ytan R ett varv runt

(a) x-axeln,

(b) y-axeln.

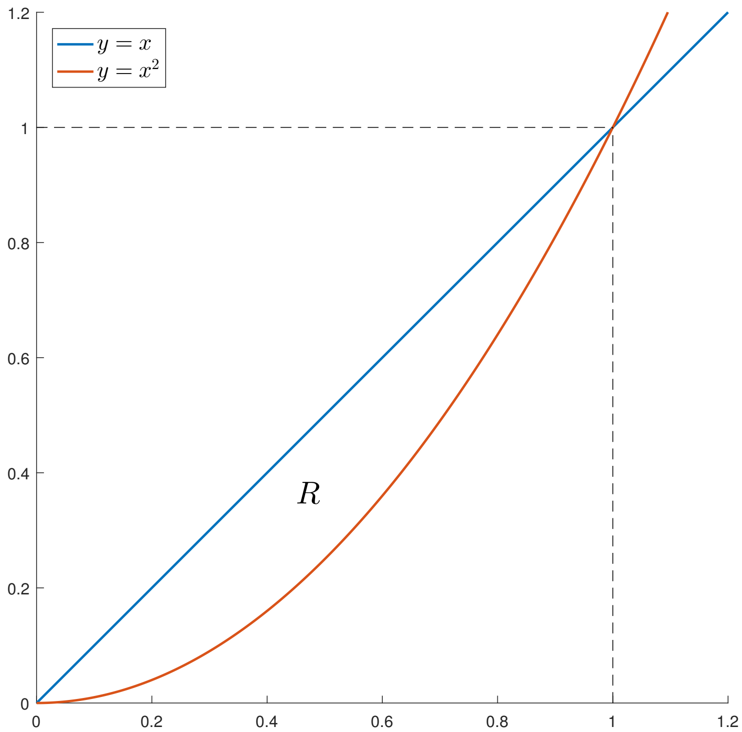
Problem 7.1.6

Låt R vara den tvådimensionella yta som begränsas av kurvorna $y = x$ och $y = x^2$. Beräkna volymen av den solid som erhålles om vi roterar ytan R ett varv runt

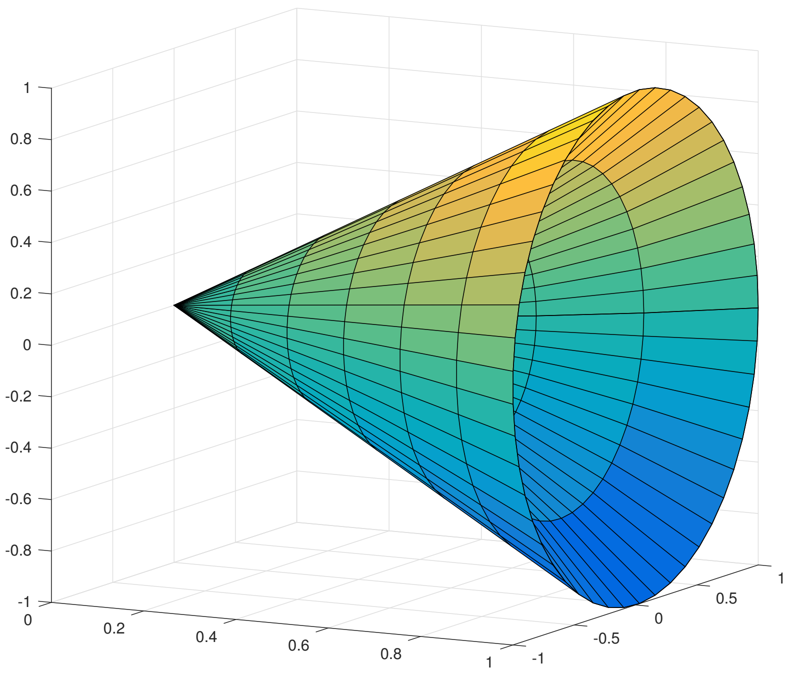
(a) x-axeln,

(b) y-axeln.

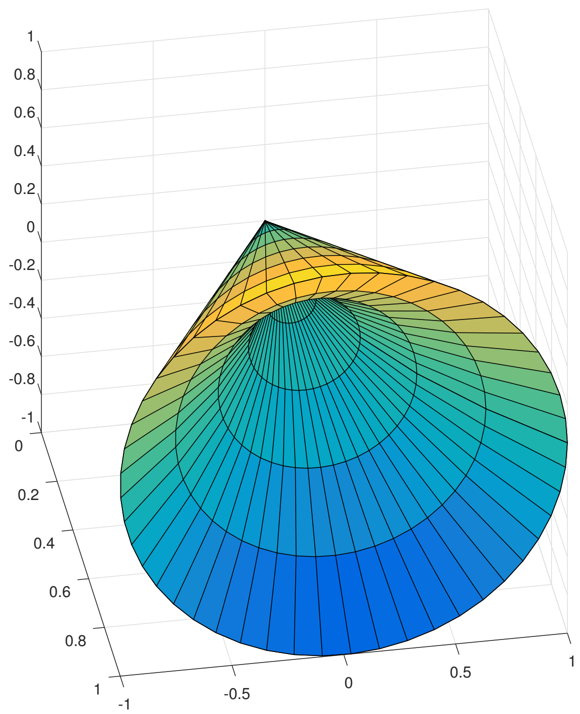
Lösning: Låt oss börja med att måla upp den aktuella regionen (Figur 7) och den solid som erhålls genom rotation kring x-axeln (Figurer 8-9).



Figur 7



Figur 8



Figur 9

I tidigare uppgifter har vi beräknat arean hos en tvådimensionell region R, begränsad av två stycken kurvor $y = f(x)$ och $y = g(x)$, genom att först beräkna arean under den översta kurvan och sedan subtrahera arean under den lägre kurvan. Här gör vi något liknande: först beräknar vi volymen hos den solid som erhålls när vi roterar den övre kurvan $y = x$ kring den valda axeln, sedan subtraherar vi volymen hos den solid som erhålls när vi roterar den nedre kurvan $y = x^2$ kring samma axel. Med andra ord beräknar vi volymen av konen i Figurerna 8-9 som om den vore en helt solid kon utan insida, och sedan subtraherar vi volymen av konens insida.

När vi roterar en kurva $f(x)$ kring x-axeln så bildas en cirkel för varje x-värde (Figur 10-11). Eftersom kurvan ligger på avståndet $f(x)$ från x-axeln så kommer motsvarande cirkel att ha radien $r = f(x)$ och ytarean $A(x) = \pi r^2 = \pi f(x)^2$. Volymen av soliden fås genom att "summera alla ytareaor", det vill säga genom att integrera över det aktuella intervallet:

$$V = \int_a^b A(x)\ \mathrm{d}x = \pi \int_a^b f(x)^2\ \mathrm{d}x.$$

Vi ska som sagt beräkna volymen mellan den kon som bildas när vi roterar $y = x$ kring x-axeln och den trumpetliknande yta som bildas när vi roterar $y = x^2$ kring samma axel. Volymen blir

$$V = \underbrace{\pi \int_0^1 x^2\ \mathrm{d}x}_{V_{\text{kon}}} - \underbrace{\pi \int_0^1 (x^2)^2\ \mathrm{d}x}_{V_{\text{trumpet}}} = \pi \int_0^1 x^2 - x^4\ \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}.$$

När vi istället roterar ytan kring y-axeln så gör vi precis likadant men vi skriver om kurvorna som funktioner $x = f(y)$ och integrerar med avseende på y:

$$y = x \iff x = y, \qquad y = x^2 \iff x = \sqrt{y} \quad (x \geq 0).$$

Som vi ser skär de två kurvorna varandra i punkterna $y = 0$ respektive $y = 1$, så vi får samma integrationsgränser som ovan. Volymen blir

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 - y^2\ \mathrm{d}y = \pi \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

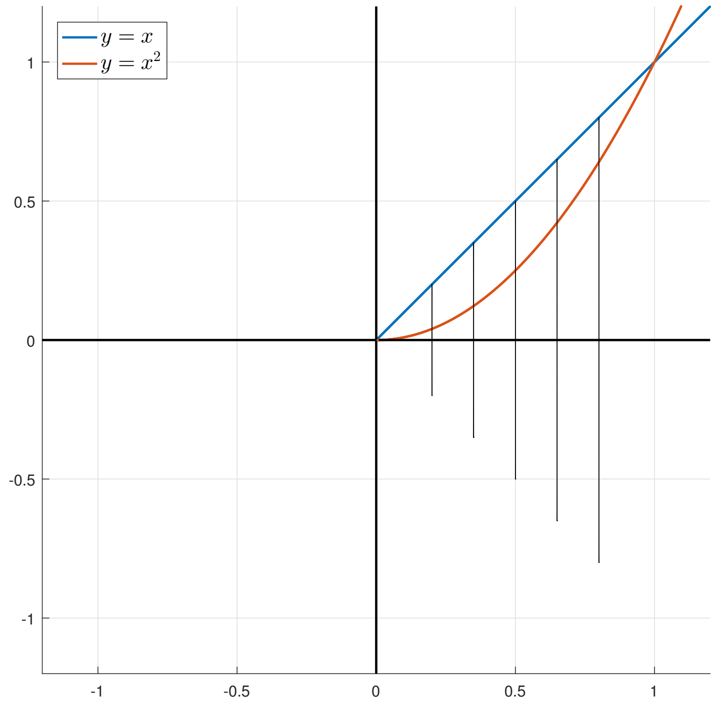
Ett snabbbare sätt att få samma svar är via integralen

$$2\pi \int_0^1 x(f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x(x - x^2)\ \mathrm{d}x = 2\pi \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

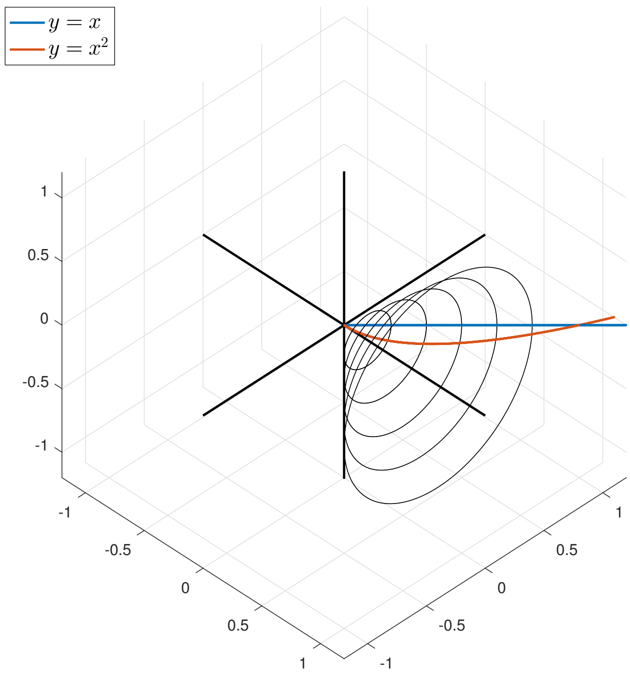
Denna metod är snabbare eftersom den inte kräver att vi skriver om kurvorna på formen $x = f(y)$ och hittar motsvarande integrationsgränser, men jag tycker det är svårare att visualisera hur denna metod fungerar. Idén är att vi för varje x bildar en cylinder med omkretsen $2\pi x$ och höjden $f(x)$, vilket ger ytarean $2\pi x f(x)$. Volymen av soliden fås sedan genom att "summera ihop" alla dessa ytareor, det vill säga integrera över x.

Ni är tillåtna att använda vilken metod ni vill.

Svar: Soliden som bildas när vi roterar kring x-axeln har volymen $\frac{2\pi}{15}$ och soliden som bildas när vi roterar kring y-axeln har volymen $\frac{\pi}{6}$.



Figur 10



Figur 11

Problem 7.1.12*

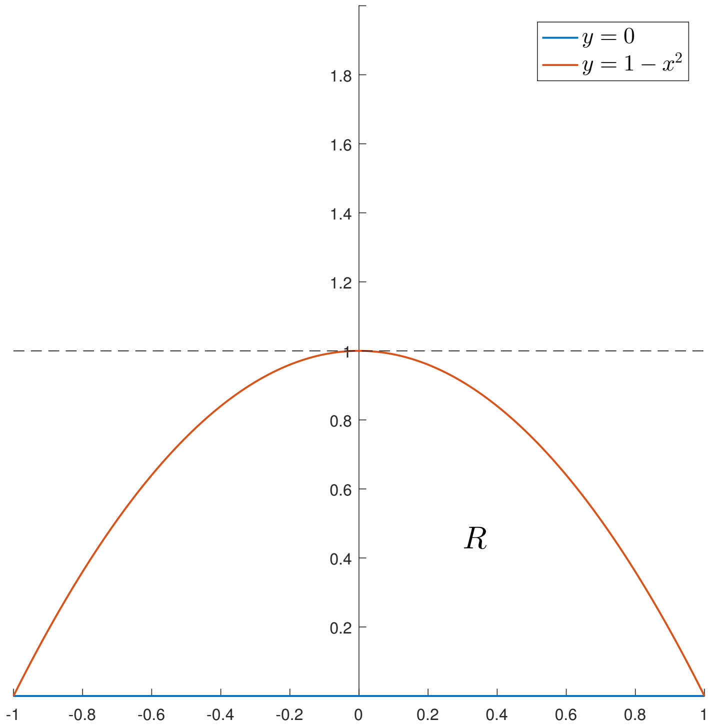
Beräkna volymen av den solid som bildas när vi roterar regionen $0 \leq y \leq 1 - x^2$ kring linjen $y = 1$.

Problem 7.1.12*

Beräkna volymen av den solid som bildas när vi roterar regionen $0 \leq y \leq 1 - x^2$ kring linjen $y = 1$.

Lösning: Ett sätt att lösa denna uppgift är att flytta integrationsaxeln till x-axeln via variabelsubstitutionen $u = y - 1$. Vi kan nu rotera regionen $-1 \leq u \leq -x^2$ kring linjen $u = 0$ (det vill säga x-axeln) och beräkna volymen precis som ovan:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (-1)^2 - (-x^2)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \left[x - \frac{1}{5}x^5 \right]_{-1}^{1} = \frac{8\pi}{5}.$$



Figur 12

Problem 7.2.2

Betrakta en solid med höjden h, och med egenskapen att tvärsnittet på höjden $0 < z < h$ är en rektangel med dimensionerna z och $h - z$. Finn solidens volym.

Problem 7.2.2

Betrakta en solid med höjden h, och med egenskapen att tvärsnittet på höjden $0 < z < h$ är en rektangel med dimensionerna z och $h - z$. Finn solidens volym.

Lösning: Föreställ er att ni skär ut en tunn slice av soliden, med tjocklek dz. Om tjockleken dz är tillräckligt liten så ser denna tunna slice ut som ett rätblock med sidlängderna z och $h-z$ samt tjockleken dz, så slicens volym är $dV = z(h-z)dz$. Om vi delar in hela soliden i såna slices och summerar de individuella volymerna så får vi volymen hos hela soliden, och när vi låter tjockleken dz gå mot 0 så blir summan en integral. Det följer att

$$V = \int_0^h z(h-z)dz = \int_0^h zh - z^2 dz = \left[\frac{1}{2}hz^2 - \frac{1}{3}z^3\right]_0^h = \frac{1}{2}h^3 - \frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{6}h^3.$$

Problem 7.2.12

Betrakta en solid med cirkulär bas av radie r, och antag att samtliga tvärsnittsytor längsmed en given diameter är liksidiga trianglar. Beräkna solidens volym.

Problem 7.2.12

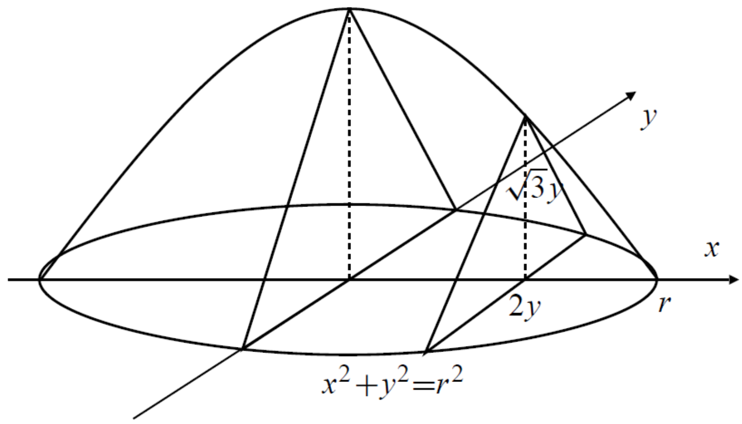
Betrakta en solid med cirkulär bas av radie r, och antag att samtliga tvärsnittsytor längsmed en given diameter är liksidiga trianglar. Beräkna solidens volym.

Lösning: Vi placerar soliden med centrum i origo och roterar den så att alla triangelformade tvärsnittsytor är parallella med y-axeln, se Figur 13. För varje x i intervallet $-r \leq x \leq r$ får vi en liksidig triangel med basen $b = 2y$ och höjden $h = \sqrt{3}y$, där vi har nyttjat att triangeln är liksidig. Triangelns tvärsnittsarea är alltså

$$A(x) = \frac{bh}{2} = \frac{2y * \sqrt{3}y}{2} = \sqrt{3}y^2 = \sqrt{3}(r^2 - x^2),$$

där vi har använd cirkels ekvation $x^2 + y^2 = r^2$. Allt som återstår är att "summera" alla tvärsnittsareor, det vill säga integrera över x:

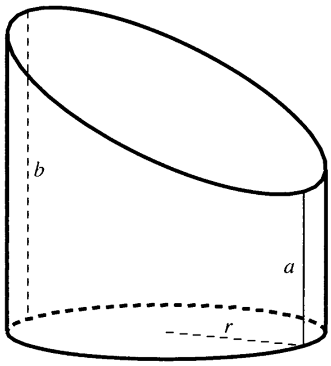
$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\ \mathrm{d}x = \sqrt{3}\int_{-r}^{r} r^2 - x^2\ \mathrm{d}x = \sqrt{3}\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} = \frac{4}{\sqrt{3}}r^3.$$



Figur 13: Bild tagen från *Instructor's Solution Manual.*

Problem 7.2.15*

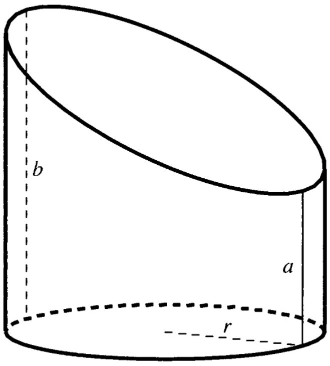
Betrakta en cirkulär cylinder med radie r, vars toppyta är ett lutande plan (Figur 15a). Om den lägsta och den högsta punkten på toppytan har höjden a respektive b, beräkna cylinderns volym.



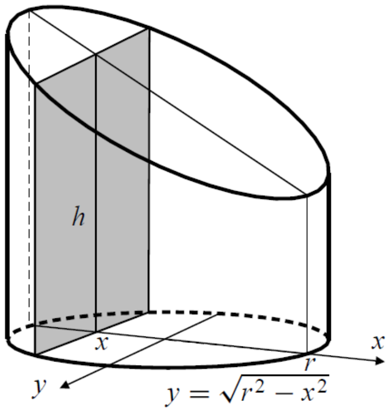
Figur 14: Bild från sida 402 i kursboken.

Problem 7.2.15*

Betrakta en cirkulär cylinder med radie r, vars toppyta är ett lutande plan (Figur 15a). Om den lägsta och den högsta punkten på toppytan har höjden a respektive b, beräkna cylinderns volym.



(a) Bild från sida 402 i kursboken.



(b) Bild från *Instructor's Solution Manual.*

Figur 15

Lösning: Placera cylinderns mittpunkt i origo och vrid cylindern så att toppytans sluttning är parallell med x-axeln (Figur 15b). Notera att vi för varje x får en rektangel med någon bredd b och höjd h som båda beror av x. Cylinderns volym kan beräknas genom att summera ihop dessa rektanglars ytareor:

$$V = \int_{-r}^{r} b * h \, \mathrm{d}x.$$

Om cylindern har radie r så ligger x i intervalllet $-r \leq x \leq r$ och cylinderns höjd är en linjär funktion $h(x) = kx + m$. Eftersom vi har placerat cylindern med den högsta punkten längst till vänster ($x = -r$) och den lägsta punkten längst till höger ($x = r$) så får vi att

$$\begin{cases} a = h(r) = kr + m, \\ b = h(-r) = -kr + m \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{a-b}{2r}, \qquad m = \frac{a+b}{2}.$$

Höjden ges alltså av

$$h(x) = \frac{a-b}{2r}x + \frac{a+b}{2}.$$

Bredden fås genom cirkelns ekvation:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = r^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

och det framgår tydligt från Figur 15b rektangelns bredd är $b(x) = 2y = 2\sqrt{r^2 - x^2}$. Således är

$$V = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2} * \left(\frac{a-b}{2r}x + \frac{a+b}{2}\right) \mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} (a+b)\sqrt{r^2 - x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi r^2(a+b)}{2}.$$

Problem 7.3.5

Beräkna längden på kurvan $y^3 = x^2$ från punkten $(-1, 1)$ till $(1, 1)$.

Problem 7.3.5

Beräkna längden på kurvan $y^3 = x^2$ från punkten $(-1, 1)$ till $(1, 1)$.

Lösning: Vi börjar med att skriva om kurvan som $y = x^{2/3}$, vilket ger derivatan $y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}$. Som beskrivs på sida 405 i boken kan vi betrakta längden som en "summa" av båglängder,

$$L = \int_{x=-1}^{x=1} \mathrm{d}s, \qquad \text{där} \qquad \mathrm{d}s = \sqrt{1 + (y')^2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{1 + \frac{4}{9}x^{-2/3}}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{3|x|^{1/3}}\ \mathrm{d}x$$

så låt oss helt enkelt beräkna denna integral:

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{3|x|^{1/3}}\ \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{3x^{1/3}}\ \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = 9x^{2/3} + 4 \\ \mathrm{d}u = 6x^{-1/3}\ \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{9}\int_{4}^{13} \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{2 * 13^{3/2} - 16}{27}. \end{aligned}$$

Pedagogisk lösning: Föreställ dig en partikel som färdas längsmed kurvan och vid tiden t har koordinaterna

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t, t^{2/3}), \qquad -1 \le t \le 1.$$

Tidsvariabeln t är inget annat än den ursprungliga variabeln x, vi har satt $t = x$. Anledningen varför vi byter ut x mot en tidsvariabel är för att enklare kunna visualisera vad som händer. Frågan *hur lång är kurvan?* kan nu översättas till frågan *hur långt färdas partikeln under tidsintervallet* $-1 \le t \le 1$*?* och svaret på denna fråga får vi genom att undersöka partikelns fart; om partikeln färdas i 1 m/s i två sekunder, 5 m/s i tre sekunder, 0.2 m/s i fem sekunder, och så vidare, så kan vi beräkna färdsträckan som

$$L = (1 \text{ m/s } * 2 \text{ s}) + (5 \text{ m/s } * 3 \text{ s}) + (0.2 \text{ m/s } * 5 \text{ s}) + \cdots = \int_{-1}^{1} \text{partikelns fart}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Partikelns hastighet ges av tidsderivatan

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \left(1, \frac{2}{3}t^{-1/3}\right),$$

men vi är inte intresserade av vilken riktning partikeln färdas i, vi vill bara veta hur snabbt den färdas. Så vi beräknar farten som storleken på hastighetsvektorn:

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{9}t^{-2/3}} = \frac{\sqrt{9t^{2/3} + 4}}{3|t|^{1/3}}.$$

Svaret på uppgiften blir därför

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^{1} \|\mathbf{r}'(t)\|\ \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{9t^{2/3} + 4}}{3|t|^{1/3}}\ \mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{9t^{2/3} + 4}}{3t^{1/3}}\ \mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u = 9t^{2/3} + 4 \\ \mathrm{d}u = 6t^{-1/3}\ \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{9}\int_{4}^{13} \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{2 * 13^{3/2} - 16}{27}. \end{aligned}$$

Problem 7.3.8*

Beräkna längden på kurvan $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ från $x = 1$ till $x = 2$.

Problem 7.3.8*

Beräkna längden på kurvan $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ från $x = 1$ till $x = 2$.

Lösning: Precis som i föregående uppgift börjar vi med att beräkna derivatan $y' = x^2 - \frac{1}{4x^2}$ och båglängdselementet

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)}\,\mathrm{d}x = \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Kurvlängden är integralen av detta båglängdselement:

$$L = \int_1^2 \mathrm{d}s = \int_1^2 x^2 + \frac{1}{4x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4x}\right]_1^2 = \frac{59}{24}.$$

Problem 7.3.20*

Beräkna ytarean hos den yta som bildas när vi roterar kurvan

$$y = x^2, \qquad 0 \leq x \leq 2$$

kring y-axeln.

Problem 7.3.20*

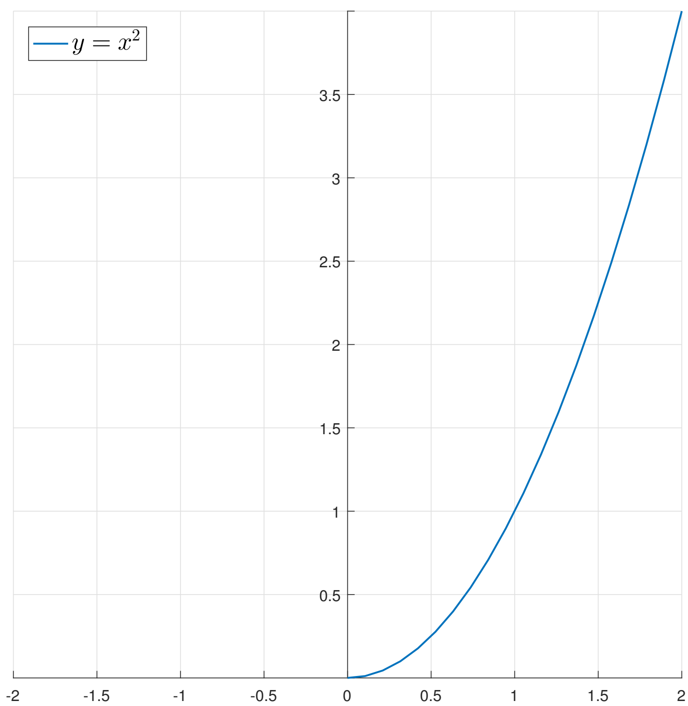
Beräkna ytarean hos den yta som bildas när vi roterar kurvan

$$y = x^2, \qquad 0 \leq x \leq 2$$

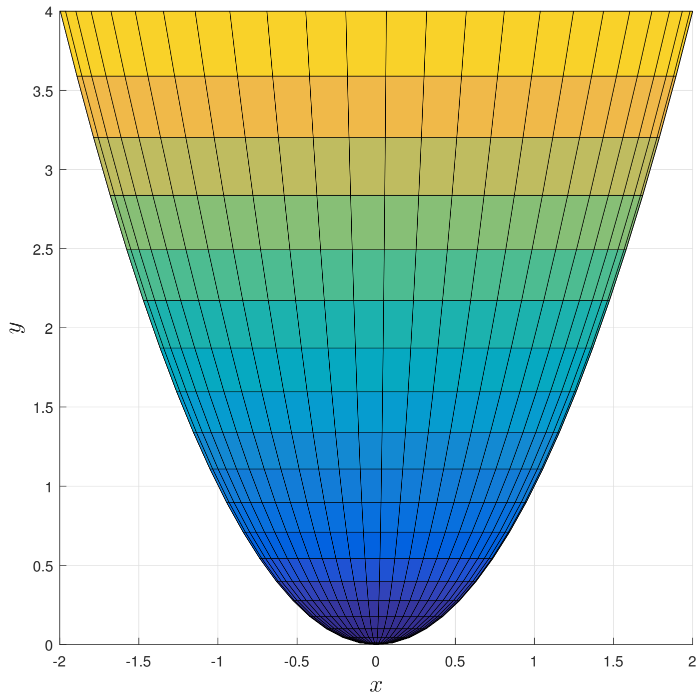
kring y-axeln.

Lösning: Kurvan $y = x^2$ är en parabolisk kurva (Figur 16), så när vi roterar den kring y-axeln får vi en djup skål (Figur 17-18). Denna skål utgörs av ett oändligt antal cirklar som bildas genom att vi, för varje värde på x, tar punkten (x, x^2) och roterar den ett varv runt y-axeln. Eftersom varje sådan cirkels radie bestäms av x-värdet ($r = x$) så har cirkeln omkretsen $2\pi r = 2\pi x$. Vi kan beräkna ytarean genom att "summera" dessa omkretser samtidigt som vi tar i åtanke hur kurvan böjs när vi går uppåt (båglängden):

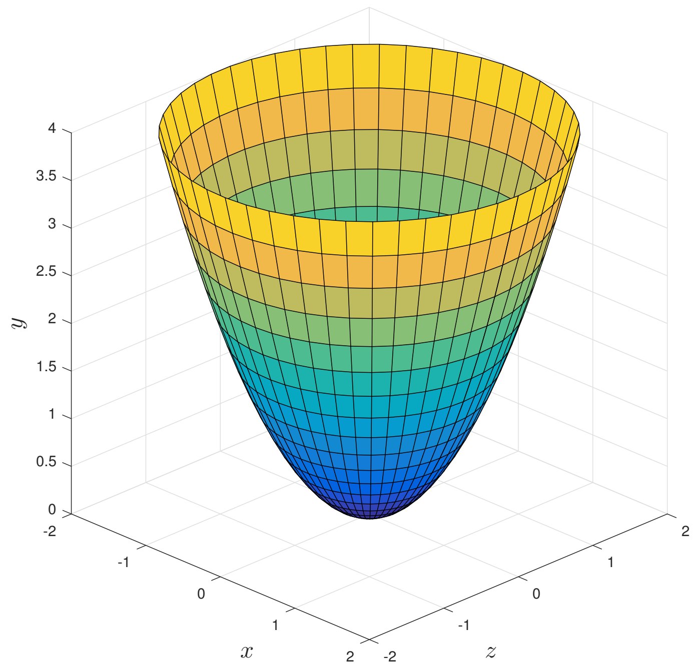
$$S = \int_0^2 2\pi x * \sqrt{1 + (y')^2}\ \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^2 x\sqrt{1 + 4x^2}\ \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = 1 + 4x^2 \\ \mathrm{d}u = 8x \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{\pi}{4} \int_1^9 \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3} u^{3/2}\right]_1^9 = \frac{13\pi}{3}.$$



Figur 16: Grafen till funktionen $y = x^2$ för $0 \leq x \leq 2$.



Figur 17



Figur 18

Läsvecka 2, Övning 3

Problem 6.2.10

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{x \, \mathrm{d}x}{3x^2 + 8x - 3}$$

Problem 6.2.10

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{3x^2+8x-3}$$

Lösning: Vi börjar med att faktorisera nämnaren i integranden,

$$3x^2+8x-3=(3x-1)(x+3)$$

och skriva om integranden på formen

$$\begin{aligned}\frac{x}{3x^2+8x-3} &= \frac{A}{3x-1}+\frac{B}{x+3} = \\ &= \frac{A(x+3)}{(3x-1)(x+3)}+\frac{B(3x-1)}{(x+3)(3x-1)} = \\ &= \frac{A(x+3)+B(3x-1)}{3x^2+8x-3}.\end{aligned}$$

Vi behöver alltså hitta uttryck A och B som uppfyller ovanstående ekvation:

$$\begin{aligned}\frac{x}{3x^2+8x-3} = \frac{A(x+3)+B(3x-1)}{3x^2+8x-3} \quad &\Rightarrow \quad x = A(x+3)+B(3x-1) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad x=(A+3B)x+(3A-B) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad A+3B=1,\ 3A-B=0 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad A=\frac{1}{10},\ B=\frac{3}{10}.\end{aligned}$$

Det följer att

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{3x^2+8x-3} = \frac{1}{10}\int \frac{1}{3x-1}+\frac{3}{x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{30}\ln|3x-1|+\frac{3}{10}\ln|x+3|+C.$$

Problem 6.2.20

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3 + 2x^2 + 2x}$$

Problem 6.2.20

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+2x^2+2x}$$

Lösning: Vi kan faktorisera ut ett x från nämnaren men mer än så går inte att faktorisera, eftersom polynomets två andra rötter är komplexa. Så vi vill skriva om integranden på formen

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3+2x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} \quad &\Rightarrow \quad 1 = A(x^2+2x+2) + (Bx+C)x \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad 1 = (A+B)x^2 + (2A+C)x + 2A \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2},\ C = -1.\end{aligned}$$

Det följer att[3]

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+2x^2+2x} &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x} - \frac{x+2}{x^2+2x+2}\ \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\ \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+2x+2}\ \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x+1 \\ \mathrm{d}u = 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x^2+2x+2| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\ \mathrm{d}u = \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x^2+2x+2| - \frac{1}{2}\arctan(x+1) + D.\end{aligned}$$

[3] Vi använder bokstaven D för integrationskonstanten eftersom bokstaven C redan används.

Problem 6.2.28*

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

Problem 6.2.28*

Utvärdera den indefinita integralen

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

Lösning: Vi gör om integranden till en rationell funktion genom att sätta $u = \sin\theta$,

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)} = \begin{bmatrix} u = \sin\theta \\ \mathrm{d}u = \cos\theta \ \mathrm{d}\theta \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)(1+u)} = \int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)(1+u)^2},$$

och i vanlig ordning skriver vi om integranden som en summa av enklare rationella funktioner:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-u)(1+u)^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} + \frac{C}{(1+u)^2} \quad &\Rightarrow \quad 1 = A(u^2+2u+1) + B(1-u^2) + C(1-u) \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad 1 = (A-B)u^2 + (2A-C)u + (A+B+C) \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad A - B = 0,\ 2A - C = 0,\ A + B + C = 1 \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad A = \frac{1}{4},\ B = \frac{1}{4},\ C = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Det följer att[4]

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)(1+u)^2} &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u} + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2} = \\
&= -\frac{1}{4}\ln|1-u| + \frac{1}{4}\ln|1+u| - \frac{1}{2}\frac{1}{1+u} + D = \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| - \frac{1}{2(1+u)} + D = \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right| - \frac{1}{2(1+\sin\theta)} + D.
\end{aligned}$$

[4] Vi använder bokstaven D för integrationskonstanten eftersom bokstaven C redan används.

Problem 6.5.8

Utvärdera integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x.$$

Problem 6.5.8

Utvärdera integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x.$$

Lösning: Vi börjar med att beräkna den indefinita integralen:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u^2 = 1-x \\ 2u\ \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x \end{bmatrix} = -2\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = -\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + C.$$

De två integrationsgränserna är $x = 0 \Rightarrow u = 1$ och $x = 1 \Rightarrow u = 0$ så svaret borde vara

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \left[-\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\right]_1^0,$$

men vi kan inte utvärdera den primitiva funktionen i punkten $u = 1$ eftersom nämnaren $u-1$ då är lika med 0. Vi måste istället betrakta följande gränsvärde:

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 1^-}\left[-\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\right]_\epsilon^0 = \lim_{\epsilon\to 1^-} \ln\left|\frac{\epsilon+1}{\epsilon-1}\right| = \infty.$$

Integralen divergerar.

Problem 6.5.10

Utvärdera integralen

$$\int_0^\infty xe^{-x}\ \mathrm{d}x$$

Problem 6.5.10

Utvärdera integralen

$$\int_0^\infty xe^{-x}\ \mathrm{d}x$$

Lösning: Vi skriver om integralen som ett gränsvärde och partialintegrerar:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xe^{-x}\ \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R xe^{-x}\ \mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} U = x, & V = -e^{-x} \\ \mathrm{d}U = \mathrm{d}x, & \mathrm{d}V = e^{-x}\ \mathrm{d}x\end{bmatrix} = \\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\left[-xe^{-x}\right]_0^R + \int_0^R e^{-x}\right) = \\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{-R}{e^R} - \frac{1}{e^R} + 1\right) = 1.\end{aligned}$$

Integralen konvergerar.

Läsvecka 3, Övning 1

Problem 18.1.4

Klassificera differentialekvationen

$$y''' + xy' = x \sin x.$$

Problem 18.1.4

Klassificera differentialekvationen

$$y''' + xy' = x \sin x.$$

Lösning: Detta är en *linjär* differentialekvation, eftersom vänsterledet endast innehåller linjära termer i y; ekvationen innehåller inte några ickelinjära termer som $(y')^2$ eller e^y eller $y''y$. Detta är en viktig egenskap, det finns mycket kraftfulla verktyg för att lösa linjära differentialekvationer, till skillnad från de mycket mer komplicerade ickelinjära differentialekvationerna.

Linjära differentialekvationer delas upp i två kategorier: *Homogena* och *ickehomogena*, beroende på om ekvationens högerled $= 0$ eller $\neq 0$. Högerledet i vår ekvation, $x \sin x$, är förstås nollskilt och ekvationen är därför ickehomogen.

Slutligen noterar vi att ekvationen är av tredje ordningen, eftersom den innehåller tredjederivatan av y. Alltså är ekvationen en tredje ordningens, ickehomogen, linjär differentialekvation.

Anmärkning: Anledningen varför vi delar upp linjära ekvationer i homogena och ickehomogena ekvationer är att, om y_1, y_2 är lösningar på den homogena motsvarigheten av vår ekvation,

$$y''' + xy' = 0,$$

så kommer en godtycklig linjärkombination $Ay_1 + By_2$ också vara en lösning:

$$(Ay_1 + By_2)''' + x(Ay_1 + By_2)' = A\underbrace{(y_1''' + xy_1')}_{=0} + B\underbrace{(y_2''' + xy_2')}_{=0} = 0,$$

men detsamma är inte sant för ickehomogena ekvationer: Om y_1 och y_2 löser den ickehomogena ekvationen $y''' + xy' = x \sin x$ så kommer en godtycklig linjärkombination $Ay_1 + By_2$ uppfylla

$$(Ay_1 + By_2)''' + x(Ay_1 + By_2)' = A\underbrace{(y_1''' + xy_1')}_{=x \sin x} + B\underbrace{(y_2''' + xy_2')}_{=x \sin x} = (A + B)x \sin x,$$

vilket bara är en lösning på den ickehomogena ekvationen om $A + B = 1$. Godtyckliga linjärkombinationer kommer alltså inte lösa ekvationen om ekvationens högerled är nollskilt, dvs. om ekvationen är ickehomogen. Däremot kommer *skillnaden* mellan två godtyckliga ickehomogena lösningar, $y_h = y_2 - y_1$, vara en lösning på den *homogena* ekvationen:

$$y_h''' + xy_h' = (y_2 - y_1)''' + x(y_2 - y_1)' = \underbrace{(y_2''' + xy_2')}_{=x \sin x} - \underbrace{(y_1''' + xy_1')}_{=x \sin x} = 0.$$

Detta faktum,

> *Skillnaden $y_h = y_2 - y_1$ mellan två godtyckliga lösningar på den ickehomogena ekvationen, löser den homogena ekvationen.*

kan omformuleras på följande sätt:

> *Om vi finner både (1) en ("partikulär")lösning y_p på den ickehomogena ekvationen, samt (2) den allmänna lösningen y_h på motsvarande homogena ekvation, så kommer den allmänna lösningen på den ickehomogena ekvationen vara summan $y = y_p + y_h$.*

vilket vi kommer använda oss mycket av.

Problem 18.1.6

Klassificera differentialekvationen

$$y'' + 4y' - 3y = 2y^2$$

Problem 18.1.6

Klassificera differentialekvationen

$$y'' + 4y' - 3y = 2y^2$$

Lösning: Vi skriver om ekvationen så att alla termer innehållandes y hamnar i vänsterledet:

$$y'' + 4y' - 3y - 2y^2 = 0.$$

Detta är en ickelinjär andra ordningens differentialekvation, eftersom den innehåller andraderivatan av y och den ickelinjära termen y^2 gör ekvationen ickelinjär. Observera att vi inte säger något om homogenitet eftersom homogenitet bara är relevant för linjära ekvationer.

Anmärkning: I föregående uppgifts anmärkning förklarade vi skillnaden mellan homogena och ickehomogena linjära ekvationer, samt relationen mellan dem: Om vi har två lösningar y_1, y_2 på en homogen linjär ekvation så kommer en godtycklig linjärkombination $Ay_1 + By_2$ också vara en lösning, men detsamma är inte sant för ickehomogena ekvationer. Däremot kan man hitta den allmänna lösningen y på en ickehomogen ekvation genom att först hitta en partikulärlösning y_p och den allmänna lösningen y_h på motsvarande homogena ekvation, och helt enkelt addera dem:

$$y = y_p + y_h.$$

När det kommer till ickelinjära differentialekvationer, däremot, finns det ingen särskild anledning varför en linjärkombination $Ay_1 + By_2$ av två lösningar y_1, y_2 skulle vara en ny lösning, oavsett om ekvationens högerled $= 0$ eller $\neq 0$. Hela idén med linjärkombinationer av lösningar faller när ekvationen är ickelinjär, och indelningen i homogena vs. ickehomogena ekvationer förlorar därmed sitt syfte. Homogenitet är alltså inte ett relevant koncept när ekvationen är ickelinjär.

Problem 2.10.40*

Finn lösningen på begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' = 5x^2 - 3x^{-1/2} \\ y'(1) = 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

På vilket intervall gäller denna lösning?

Problem 2.10.40*

Finn lösningen på begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' = 5x^2 - 3x^{-1/2} \\ y'(1) = 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

På vilket intervall gäller denna lösning?

Lösning: Vänsterledet innehåller bara andraderivatan y'', vilket ju är derivatan av y', så om vi integrerar båda sidor erhåller vi förstaderivatan:

$$y' = \int y'' \, \mathrm{d}x = \int 5x^2 - 3x^{-1/2} \, \mathrm{d}x = \frac{5}{3}x^3 - 6x^{1/2} + C.$$

Vi kan även använda begynnelsevillkoret $y'(1) = 2$ för att hitta värdet på konstanten C:

$$2 = y'(1) = \frac{5}{3} - 6 + C \quad \Rightarrow \quad C = 8 - \frac{5}{3} = \frac{19}{3}.$$

Lösningen y finner vi på samma sätt:

$$y = \int y' \, \mathrm{d}x = \int \frac{5}{3}x^3 - 6x^{1/2} + \frac{19}{3} \, \mathrm{d}x = \frac{5}{12}x^4 - 4x^{3/2} + \frac{19}{3}x + D,$$

där konstanten D ges av begynnelsevillkoret $y(1) = 0$:

$$0 = y(1) = \frac{5}{12} - 4 + \frac{19}{3} + D \quad \Rightarrow \quad D = 4 - \frac{5}{12} - \frac{19}{3} = \frac{48 - 5 - 76}{12} = -\frac{33}{12} = -\frac{11}{4}.$$

Lösningen på begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$y = \frac{5}{12}x^4 - 4x^{3/2} + \frac{19}{3}x - \frac{11}{4}.$$

Funktionen och dess derivator är definierade för alla positiva x-värden, men försöker vi mata in negativa x-värden så uppstår problem med komplexa kvadratrötter. Dessutom existerar $3x^{-1/2}$ inte för $x = 0$, så lösningen gäller bara på intervallet $(0, \infty)$.

Problem 3.4.12

Om halveringstiden för radium är 1690 år, hur stor andel av den nuvarande mängden kommer finnas kvar efter (a) 100 år? (b) 1000 år?

Problem 3.4.12

Om halveringstiden för radium är 1690 år, hur stor andel av den nuvarande mängden kommer finnas kvar efter (a) 100 år? (b) 1000 år?

Lösning: Låt $P(t)$ vara andelen radium som återstår efter t år, så att $P(0) = P_0 = 1$ eftersom andelen som återstår efter 0 år är 100%. Sönderfallshastigheten $P'(t)$ är proportionell mot den andel radium som återstår, $P'(t) = kP(t)$ för någon proportionalitetskonstant k. Detta innebär exempelvis att om vi dubblar mängden radium så kommer dubbelt så mycket att sönderfalla varje år, vilket känns ganska rimligt. Vi hittar alltså $P(t)$ genom att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} P'(t) = kP(t) \\ P(0) = 1 \end{cases}$$

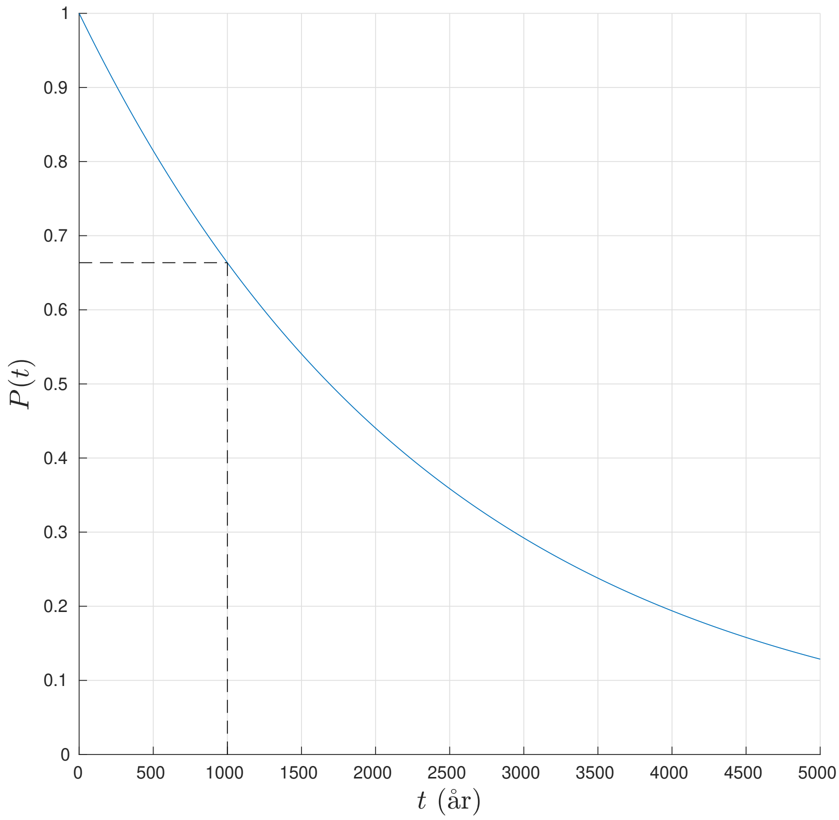
Detta är en standardekvation med lösningen $P(t) = e^{kt}$. Vi kan även hitta värdet på konstanten k eftersom vi vet halveringstiden: Andelen radium som återstår efter 1690 år ska vara 50%, så

$$\frac{1}{2} = P(1690) = e^{1690k} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{1}{2} = 1690k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln(1/2)}{1690} = -\frac{\ln 2}{1690}.$$

Andelen radium som återstår efter t år ges alltså av funktionen $P(t) = e^{-\frac{\ln(2)t}{1690}}$, och

$$P(100) = e^{100k} = e^{-\frac{100}{1690}\ln(2)} \approx 0.96, \qquad P(1000) = e^{1000k} = e^{-\frac{1000}{1690}\ln(2)} \approx 0.66$$

Efter 100 år återstår 96% av den ursprungliga mängden radium, och efter 1000 år återstår 66%.



Problem 3.4.26*

Ett objekt placeras i en frys som håller en konstant temperatur av $-5°$C. Om objektet kyls ned från $45°$C till $20°$C på 40 minuter, hur många fler minuter tar det att kyla ner objektet till $0°$C?

Problem 3.4.26*

Ett objekt placeras i en frys som håller en konstant temperatur av $-5°$C. Om objektet kyls ned från $45°$C till $20°$C på 40 minuter, hur många fler minuter tar det att kyla ner objektet till $0°$C?

Lösning: Låt $T(t)$ vara objektets temperatur t minuter efter att dess temperatur var $45°$C. Med andra ord är $T(0) = 45$ och $T(40) = 20$. Hastigheten med vilken temperaturen sjunker ges av *Newton's law of cooling*:

> "A hot object introduced into a cooler environment will cool at a rate proportional to the excess of its temperature above that of its environment."

(Sida 185 i min upplaga av kursboken.)

Omgivningen utgörs av frysen, som har temperaturen $-5°$C. Hastigheten med vilken objektets temperatur sjunker, $T'(t)$, är alltså proportionell mot skillnaden $T(t) - (-5)$ mellan objektets och omgivningens temperatur:

$$T'(t) = k(T(t) + 5)$$

för någon konstant k. Om vi sätter $u(t) = T(t) + 5$ får vi alltså begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = ku \\ u(0) = 50 \end{cases}$$

Själva differentialekvationen har lösningen $u = Ce^{kt}$ och begynnelsevärdet ger oss värdet på C:

$$50 = u(0) = Ce^0 = C, \qquad \Rightarrow \qquad u(t) = 50e^{kt}.$$

Vi kan dessutom lista ut k eftersom vi vet temperaturen efter $t = 40$ minuter:

$$25 = u(40) = 50e^{40k} \quad \Rightarrow \quad 40k = \ln\frac{25}{50} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{40}\ln\frac{1}{2} = -\frac{1}{40}\ln(2).$$

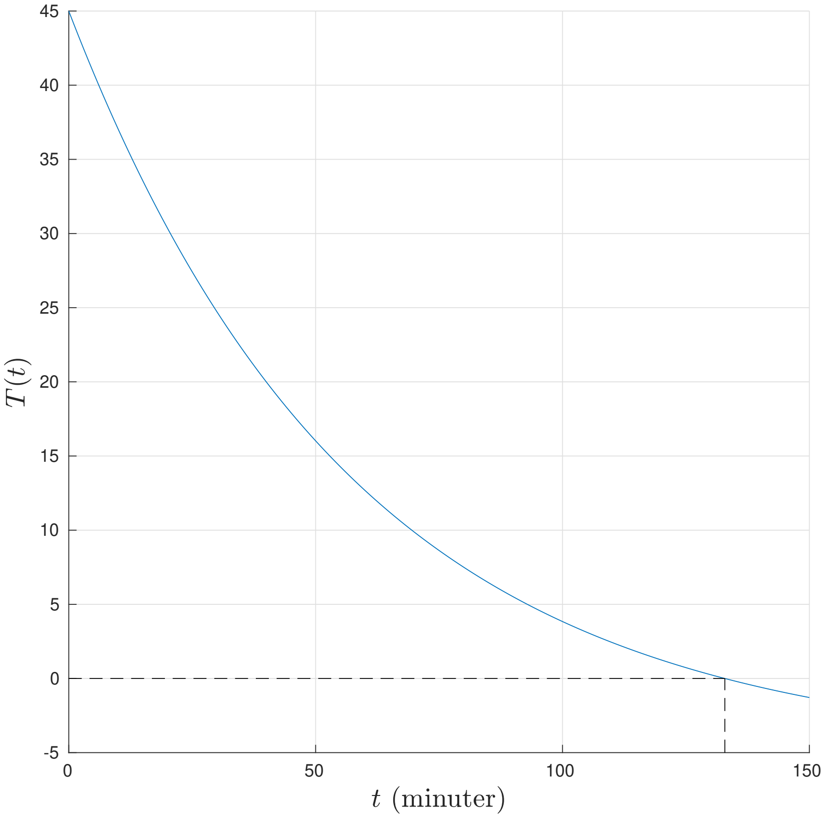
Nu kan vi allt om funktionen $u(t)$ och det är dags att lösa uppgiften. Vi vill beräkna den tid t för vilken temperaturen $T(t) = 0$, det vill säga $u(t) = 5$. Vi får att

$$5 = u(t) = 50e^{kt} \quad \Rightarrow \quad kt = \ln\frac{5}{50} \quad \Rightarrow t = \frac{1}{k}\ln\frac{1}{10} = -40\frac{\ln(1/10)}{\ln(2)} \approx 132.88 \text{ minuter}.$$

Temperaturen ges alltså av funktionen

$$T(t) = u(t) - 5 = 50e^{-\frac{\ln(2)t}{40}} - 5,$$

och det tar ytterligare ca. $132.88 - 40 = 92.88$ minuter att kyla ned objektet till $0°$C.


45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
-5
$T(t)$
0
50
100
150
t (minuter)

Problem 7.9.6

Lös den separabla ekvationen

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^x \sin t.$$

Problem 7.9.6

Lös den separabla ekvationen

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^x \sin t.$$

Lösning: Vi flyttar över alla x till vänsterledet och alla t till högerledet,

$$e^{-x}\ \mathrm{d}x = \sin t\ \mathrm{d}t$$

och integrerar på båda sidor:

$$\int e^{-x}\ \mathrm{d}x = \int \sin t\ \mathrm{d}t \qquad \iff \qquad -e^{-x} = -\cos t + C.$$

Multiplicera båda sidor med -1 och ta logaritmen på båda sidor. Det följer att[5]

$$x(t) = -\ln(\cos t + C).$$

[5] Man kan tycka att svaret borde vara $x(t) = -\ln(\cos t - C)$, men eftersom konstanten C är godtycklig så spelar dess tecken ingen roll och vi föredrar plustecken.

Problem 7.9.16

Lös den separabla ekvationen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2e^x y = e^x.$$

Problem 7.9.16

Lös den separabla ekvationen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2e^x y = e^x.$$

Lösning: Vi flyttar över alla y till vänsterledet och alla x till högerledet,[6]

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^x(1-2y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{1-2y}\,\mathrm{d}y = e^x\,\mathrm{d}x,$$

och integrerar på båda sidor:

$$\int \frac{1}{1-2y}\,\mathrm{d}y = \int e^x\,\mathrm{d}x \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{2}\ln|1-2y| = e^x + C.$$

Notera absolutbeloppet i vänsterledet. Om vi nu exponentierar båda sidor får vi relationen

$$\begin{aligned} |1-2y| = e^{-2e^x+C} \quad &\Rightarrow \quad 1-2y = \pm e^{-2e^x+C} \\ &\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}e^{-2e^x+C} = \frac{1}{2} + \left(\pm\frac{1}{2}e^C\right)e^{-2e^x} = \frac{1}{2} + De^{-2e^x}, \end{aligned}$$

där vi har satt $D = \pm\frac{1}{2}e^C$. Svaret är således

$$y = \frac{1}{2} + De^{-2e^x}.$$

Konstanten C som vi fick tidigare kan anta vilket värde som helst. En omedelbar konsekvens är att konstanten $D = +\frac{1}{2}e^C$ kan anta vilket positivt värde som helst, och konstanten $D = -\frac{1}{2}e^C$ kan anta vilket negativt värde som helst. Dessutom kan vi testa vad som händer om $D = 0$, dvs. om $y = \frac{1}{2}$. Då blir

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2e^x y = 0 + 2e^x\frac{1}{2} = e^x,$$

så $y = \frac{1}{2}$ är också en lösning på ekvationen; anledningen varför vi inte fann denna lösning tidigare är att metoden vi använde krävde att uttrycket $\frac{1}{1-2y}$ existerar, vilket inte stämmer om $y = \frac{1}{2}$. Resultatet av denna diskussion är att värdet på konstanten D inte spelar någon roll, funktionen

$$y = \frac{1}{2} + De^{-2e^x}$$

löser ekvationen för alla värden på D.

[6] Ekvivalensen utgår från att uttrycket $\frac{1}{1-2y}$ existerar, dvs att $y \neq \frac{1}{2}$. Mer om detta i slutet av lösningen.

Problem 7.9.18

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3x^2 y = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Problem 7.9.18

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3x^2 y = x^2 \\ \qquad y(0) = 1 \end{cases}$$

Lösning: Vi börjar med att separera variablerna,[7]

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2(1-3y) \qquad \iff \qquad \frac{1}{1-3y}\ \mathrm{d}y = x^2\ \mathrm{d}x,$$

och integrera båda sidor:

$$\int \frac{1}{1-3y}\ \mathrm{d}y = \int x^2\ \mathrm{d}x \qquad \iff \qquad -\frac{1}{3}\ln|1-3y| = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Det följer att $|1-3y| = e^{-x^3+C}$, vilket låter oss lösa ut y på samma sätt som i föregående uppgift:

$$y = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}e^{-x^3+C} = \frac{1}{3} + \left(\pm\frac{1}{3}e^C\right) e^{-x^3} = \frac{1}{3} + De^{-x^3},$$

där vi har satt $D = \pm\frac{1}{3}e^C$. Begynnelsevärdet ger i detta fall ett specifikt värde på konstanten:

$$1 = y(0) = \frac{1}{3} + D \quad \Rightarrow \quad D = \frac{2}{3},$$

så lösningen är alltså

$$y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-x^3}.$$

[7]Denna gång antar vi att $y \neq \frac{1}{3}$. Detta är okej eftersom $y = \frac{1}{3}$ inte är en lösning på begynnelsevärdesproblemet.

Läsvecka 3, Övning 2

Problem 3.7.4

Hitta den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$4y'' - 4y' - 3y = 0.$$

Problem 3.7.4

Hitta den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$4y'' - 4y' - 3y = 0.$$

Lösning: Vi vill undersöka om ekvationen har en lösning på formen $y = e^{rt}$. I så fall är

$$\begin{aligned} 0 &= 4y'' - 4y' - 3y \\ &= 4\left(e^{rt}\right)'' - 4\left(e^{rt}\right)' - 3\left(e^{rt}\right) \\ &= 4r^2e^{rt} - 4re^{rt} - 3e^{rt} = (4r^2 - 4r - 3)e^{rt}. \end{aligned}$$

Om en produkt försvinner (dvs. är lika med noll), så måste minst en av faktorerna i produkten försvinna, vilket alltså innebär att $4r^2 - 4r - 3 = 0$ och/eller $e^{rt} = 0$. Men en exponential som e^{rt} kan inte försvinna, så det måste vara polynomet som försvinner:

$$4r^2 - 4r - 3 = 0, \qquad \Longleftrightarrow \qquad r^2 - r - \frac{3}{4} = 0.$$

För att hitta lösningar $y = e^{rt}$ på differentialekvationen behöver vi alltså bara finna polynomets rötter, vilket vi kan göra med PQ-formeln eller valfri annan metod:

$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1} \qquad \Rightarrow \qquad r_1 = -\frac{1}{2}, \quad r_2 = \frac{3}{2}.$$

Vi har med andra ord funnit de två lösningarna

$$y = e^{-\frac{1}{2}t} \qquad \text{och} \qquad y = e^{\frac{3}{2}t}.$$

Ekvationen är dessutom linjär, vilket innebär att alla linjärkombinationer

$$y = Ae^{-\frac{1}{2}t} + Be^{\frac{3}{2}t}$$

är lösningar. Faktum är att samtliga lösningar kan skrivas på denna form, det finns inga andra lösningar. Den som vill försöka bevisa detta faktum kan ta sig en titt på Problem 3.7.18 i boken.

Problem 3.7.14

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$$

Problem 3.7.14

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$$

Lösning: Precis som i föregående uppgift söker vi efter lösningar på formen $y = e^{rt}$. Vi får att

$$\begin{aligned} 0 &= y'' + 10y' + 25y = \\ &= \left(e^{rt}\right)'' + 10\left(e^{rt}\right)' + 25\left(e^{rt}\right) = \\ &= r^2e^{rt} + 10re^{rt} + 25e^{rt} = (r^2 + 10r + 25)e^{rt}, \end{aligned}$$

vilket, enligt samma logik som i föregående uppgift, implicerar att polynomet försvinner:

$$0 = r^2 + 10r + 25 = (r+5)^2.$$

Detta polynom har den enda roten $r = -5$. Den allmänna lösningen är därför på formen

$$y = Ae^{-5t} + Bte^{-5t}.$$

För att förstå varifrån koeffcienten Bt kommer, se **CASE II** i början av sektion 3.7 i kursboken.

Om uppgiften bara hade varit att lösa differentialekvationen $y'' + 10y' + 25y = 0$ så hade vi varit klara nu. Uppgiften ber oss dock inte att hitta den *allmänna* lösningen, men den *specifika* lösning som dessutom uppfyller begynnelsevillkoren $y(1) = 0$ och $y'(1) = 2$. Dessa villkor kommer ge oss specifika värden på koefficienterna A och B. För att hitta dessa värden så beräknar vi derivatan av den allmänna lösningen,

$$y' = -5Ae^{-5t} + (1-5t)Be^{-5t}$$

och sätter sedan in $t = 1$ i våra uttryck för den allmänna lösningen och dess derivata:

$$\begin{cases} 0 = y(1) = Ae^{-5} + Be^{-5} = (A+B)e^{-5} \\ 2 = y'(1) = -5Ae^{-5} - 4Be^{-5} = (-5A - 4B)e^{-5} \end{cases}$$

Vänsterledet i respektive rad är det värde som uppgiften säger att lösningen/derivatan ska anta, medan högerledet är det värde vi faktiskt får när vi sätter in $t = 1$. Allt vi behöver göra nu är att finna de koefficienter A och B för vilka vänster- och högerleden sammanfaller, vilket innebär att vi behöver lösa ekvationssystemet:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -5A - 4B = 2e^5 \end{cases}$$

Den första ekvationen säger att $B = -A$, och om vi nu ersätter B med $-A$ i den andra ekvationen så får vi relationen

$$-5A + 4A = 2e^5 \quad \Longleftrightarrow \quad A = -2e^5.$$

Alltså är $B = -A = 2e^5$, så lösningen på vårt begynnelsevärdesproblem är

$$y = -2e^{-5(t-1)} + 2te^{-5(t-1)} = 2(t-1)e^{-5(t-1)}.$$

Problem 3.7.24

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$$

Bestäm lösningens vinkelfrekvens, frekvens, period och amplitud.

Problem 3.7.24

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$$

Bestäm lösningens vinkelfrekvens, frekvens, period och amplitud.

Lösning: Än en gång testar vi att ansätta $y = e^{rt}$, vilket ger ekvationen

$$0 = y'' + 4y = \left(e^{rt}\right) + 4\left(e^{rt}\right) = r^2e^{rt} + 4e^{rt} = (r^2+4)e^{rt}.$$

Den resulterande andragradsekvationen $r^2+4 = 0$ är på formen $ar^2+br+c = 0$ för koefficenterna $a = 1$, $b = 0$, $c = 4$. Eftersom $b^2 - 4ac = -16 < 0$ befinner vi oss den situation som boken kallar **Case III**, och lösningen är därför på formen[8]

$$y = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

för några konstanter A, B och någon vinkelfrekvens ω. Notera att

$$y'' = -\omega^2 A\cos(\omega t) - \omega^2 B\sin(\omega t) = -\omega^2 y, \qquad \Rightarrow \qquad y'' + \omega^2 y = 0,$$

från vilket vi drar slutsatsen att $\omega^2 = 4$. Detta skulle kunna innebära antingen att $\omega = -2$ eller att $\omega = +2$ men det visar sig att båda alternativen ger upphov till exakt samma lösning, så det spelar ingen roll vilket alternativ vi väljer. Av ren konvention väljer vi därför den positiva vinkelfrekvensen $\omega = 2$. Begynnelsevillkoren säger oss även att

$$\begin{cases} 2 = y(0) = A\cos(0) + B\sin(0) = A * 1 + B * 0 = A, \\ -5 = y'(0) = -\omega A\sin(0) + \omega B\cos(0) = -\omega A * 0 + \omega B * 1 = \omega B = 2B, \end{cases}$$

vilket innebär att $A = 2$ och $B = -\frac{5}{2}$. Den allmänna lösningen är således

$$y = 2\cos(2t) - \frac{5}{2}\sin(2t).$$

Definitionerna av de fyra kvantiteterna som vi ska beräkna står i slutet av Sektion 3.7 i kursboken, den del som handlar om *harmonisk rörelse*. Jag rekommenderar er varmt att läsa denna sektion och försöka förstå innebörden hos de fyra termerna, de är viktiga såväl inom fysik som inom kemi och många andra områden; den så kallade *harmoniska oscillatorn* är troligen en av de viktigaste modellerna inom modern naturvetenskap.

- **Amplituden** är $R = \sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{4 + 25/4} = \sqrt{41}/2$.
- **Vinkelfrekvensen** är $\omega = 2$.
- **Perioden** är $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
- **Frekvensen** är $1/T = 1/\pi$.

[8]**Möjligen överkurs:** Denna metod skiljer sig från tidigare lösningars metod därför att polynomet r^2+4 har komplexa rötter. Det går visserligen att lösa differentialekvationen ändå, med precis samma metod som i tidigare uppgifter, och få en lösning på formen

$$y = Ce^{r_1 t} + De^{r_2 t},$$

där r_1, r_2 är polynomets komplexa rötter: $r_1 = x_1 + iy_1$ och $r_2 = x_2 + iy_2$. Via Eulers identitet,

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t),$$

kan man sedan skriva om denna komplexa lösning på formen vi använder: $y = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Boken tar helt enkelt en genväg och går omedelbart till denna alternativa form på lösningen, så man slipper göra omskrivningar.

Problem 18.6.4

Finn den allmänna lösningen på differentialekvationen

$$y'' + y' - 2y = e^x \tag{3}$$

via metoden om obestämda koefficienter.

Problem 18.6.4

Finn den allmänna lösningen på differentialekvationen

$$y'' + y' - 2y = e^x \tag{4}$$

via metoden om obestämda koefficienter.

Lösning: Denna ekvation är en linjär, ickehomogen differentialekvation. Kom ihåg, från bokens kapitel 18.6, att den allmänna lösningen kan skrivas som summan $y = y_p + y_h$ av en godtyckligt vald partikulärlösning y_p, och den allmänna lösningen y_h på den homogena motsvarigheten av samma ekvation. Vi börjar med att lösa den homogena ekvationen

$$y_h'' + y_h' - 2y_h = 0. \tag{5}$$

När vi ansätter $y_h = e^{rt}$ får vi, precis som i tidigare uppgifter, en polynomekvation:

$$r^2 + r - 2 = 0 \quad \iff \quad (r+2)(r-1) = 0, \quad \iff \quad r_1 = -2,\ r_2 = 1,$$

vilket ger de två lösningarna $y_h = e^{-2x}$ och $y_h = e^x$. Den allmänna lösningen på den homogena, linjära ekvationen (5) är således linjärekvationen

$$y_h = Ae^x + Be^{-2x}.$$

Metoden om obestämda koefficienter, som uppgiften ber oss använda, handlar egentligen bara om att göra en kvalificerad gissning om hur lösningen skulle kunna se ut. Vi noterar att högerledet i den inhomogena ekvationen är e^x, vilket indikerar att vår partikulärlösning också skulle kunna innehålla en faktor e^x. Vi provar att ansätta

$$y_p = Cxe^x. \tag{6}$$

Om vi matar in den här funktionen i differentialekvationens vänsterled så får vi nämligen

$$y_p'' + y_p' - 2y_p = (2Ce^x + Cxe^x) + (Ce^x + Cxe^x) - 2Ce^x = 3Ce^x.$$

Högerledet ska vara lika med e^x, så vi får en partikulärlösning om vi sätter $C = \frac{1}{3}$. Den allmänna lösningen på den inhomogena ekvationen är således summan

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{3}xe^x + Ae^x + Be^{-2x}.$$

Överkurs: En av de vanligaste frågorna när man studerar differentialekvationer är *Hur vet vi att det inte finns ännu fler lösningar? Hur vet vi att vår lösning är den allmänna lösningen?* Detta är en mycket bra och högst befogad fråga som tyvärr är svår att besvara i vissa fall, eftersom svaret kan kräva avancerad matematik. När man läser sin första kurs om differentialekvationer så brukar man lära sig en uppsättning standardlösningar och bara bevisa *några* allmänna lösningar. När det gäller just **Problem 18.6.4.** så kan vi faktiskt bevisa att lösningen som vi fann är allmän:

Antag att $y'' + y' - 2y = e^x$ och skriv om den allmänna lösningen på formen $y = g(x)e^x$ för någon hittills okänd funktion g. Vi kan alltid göra denna omskrivning genom att multiplicera och dividera den allmänna lösningen med e^x:

$$y = \big(ye^{-x}\big)e^x = g(x)e^x, \qquad g(x) = ye^{-x}.$$

Om vi matar in denna lösning i differentialekvationen så får vi relationen

$$y'' + y' - 2y = [g''(x) + 2g'(x) + g(x)]e^x + [g'(x) + g(x)]e^x - 2g(x)e^x = e^x,$$

vilken vi kan skriva om som

$$[g''(x) + 3g'(x)]e^x = e^x \qquad \Longleftrightarrow \qquad g''(x) + 3g'(x) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad g'(x) + 3g(x) = x + C.$$

Differentialekvationen $g' + 3g = x + C$ löses av

$$g(x) = De^{-3x} + \frac{x}{3} + \frac{C}{3} - \frac{1}{9},$$

så den allmänna lösningen $y = g(x)e^x$ till den ursprungliga ekvationen är

$$y = g(x)e^x = \left(De^{-3x} + \frac{x}{3} + \frac{C}{3} - \frac{1}{9}\right)e^x = \frac{1}{3}xe^x + Ae^x + Be^{-2x},$$

där vi har satt $A = \frac{C}{3} - \frac{1}{9}$ och $B = D$.

Problem 18.6.6

Finn den allmänna lösningen på den ickehomogena ekvationen

$$y'' + 4y = x^2$$

via metoden om obestämda koeffcienter.

Problem 18.6.6

Finn den allmänna lösningen på den ickehomogena ekvationen

$$y'' + 4y = x^2$$

via metoden om obestämda koeffcienter.

Lösning: Precis som i föregående uppgift kommer vi beräkna (1) den allmänna lösningen y_h på den homogena ekvationen, och (2) en partikulärlösning på den ickehomogena ekvationen; den allmänna lösningen på den ickehomogena ekvationen kan sedan skrivas som linjärkombinationen $y = y_p + y_h$. Den homogena ekvationen får vi genom att nollställa högerledet:

$$y_h'' + 4y_h = 0.$$

Vi vet sedan tidigare (**Problem 3.7.24**) att den allmänna lösningen på denna ekvation är

$$y_h = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

Härnäst söker vi en partikulärlösning till den ickehomogena ekvationen, och vi noterar först och främst att högerledet x^2 är ett polynom; kanske det finns ett polynom y som löser ekvationen? I så fall bör y vara ett andragradspolynom

$$y = Ax^2 + Bx + C. \tag{7}$$

Om lösningen y istället hade varit ett tredjegradspolynom, säg, så skulle termen $4y$ göra vänsterledet $y'' + 4y$ till ett tredjegradspolynom, och vänsterledet skulle därför inte kunna vara lika med andragradspolynomet x^2 i högerledet. När vi matar in ansättningen (7) i ekvationen så får vi

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= \left(Ax^2 + Bx + C\right)'' + 4(Ax^2 + Bx + C) = \\ &= 4Ax^2 + 4Bx + (2A + 4C), \end{aligned}$$

och om vi kräver att detta ska sammanfalla med högerledet x^2 så kan vi lista ut vilka koefficienter som behövs: Termen $4Ax^2$ ska bli x^2, vilket ger koefficienten $A = \frac{1}{4}$. Dessutom ska båda termerna $4Bx$ och $2A + 4C = \frac{1}{2} + 4C$ försvinna, eftersom vi inte vill ha någonting mer än x^2-termen kvar. Det följer att $B = 0$, och $C = -1/8$, och vi har därför partikulärlösningen

$$y_p = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}.$$

Den allmänna lösningen är således summan

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

Problem 18.6.12

Finn den allmänna lösningen på den ickehomogena ekvationen

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x}$$

via metoden om obestämda koeffcienter.

Problem 18.6.12

Finn den allmänna lösningen på den ickehomogena ekvationen

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x}$$

via metoden om obestämda koeffcienter.

Lösning: Vi börjar återigen med att lösa den homogena ekvationen

$$y_h'' + 2y_h' + y_h = 0.$$

När vi matar in den vanliga ansatsen $y_h = e^{rx}$ i högerledet så får vi relationen

$$(r^2 + 2r + 1)e^{rx} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r^2 + 2r + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (r+1)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = -1,$$

vilket ger den allmänna lösningen

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^{-x}.$$

Högerledet i den inhomogena ekvationen är ett polynom x multiplicerat med e^{-x}, så låt oss leta efter en partikulärlösning på samma form: ett polynom gånger e^{-x}. Vi behöver inte bry oss om termer av grad 0 och grad 1 eftersom den homogena lösningen y_h redan innehåller såna termer, så vi begränsar oss till termer av lite högre grad:

$$y = (Ax^3 + Bx^2)e^{-x},$$

Om vi inte skulle hitta en partikulärlösning på ovanstående form så skulle vi kunna prova termer av grad 4, grad 5, etc. men i detta fall visar sig grad 3 vara tillräckligt. För detta polynom ger

$$\begin{cases} y = (Ax^3 + Bx^2)e^{-x} \\ y' = (3Ax^2 + 2Bx)e^{-x} - y \\ y'' = (6Ax + 2B)e^{-x} - (3Ax^2 + 2Bx)e^{-x} - y' = \\ \quad = (6Ax + 2B)e^{-x} - 2y' - y \end{cases} \tag{8}$$

vilket ger relationen

$$y'' + 2y' + y = \Big((6Ax + 2B)e^{-x} - 2y' - y\Big) + 2y' + y = (6Ax + 2B)e^{-x}.$$

Vi vill nu hitta värden på koefficienterna A, B så att uttrycket ovan sammanfaller med högerledet xe^{-x} i den ickehomogena ekvationen. Termen $6Ax$ måste alltså bli x medan termen $2B$ måste försvinna, så vi drar slutsatsen att $A = \frac{1}{6}$ och $B = 0$. Vi får med andra ord partikulärlösningen

$$y_p = \frac{1}{6}x^3 e^{-x},$$

och den allmänna lösningen

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{6}x^3 e^{-x} + (C_1 + C_2 x)e^{-x} = \left(\frac{1}{6}x^3 + C_2 x + C_1\right)e^{-x}.$$

Uppgifter ur Lay

Läsvecka 3, Övning 3

Problem 1.1.22 (repetition)

Har de tre planen

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \qquad x_2 - x_3 = 1, \qquad \text{och} \qquad x_1 + 3x_2 = 0$$

någon punkt gemensamt? Förklara.

Problem 1.1.22 (repetition)

Har de tre planen

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \qquad x_2 - x_3 = 1, \qquad \text{och} \qquad x_1 + 3x_2 = 0$$

någon punkt gemensamt? Förklara.

Lösning: Om de tre planen har en punkt (x_1, x_2, x_3) gemensamt så måste denna punkt uppfylla alla tre ekvationer ovan. Med andra ord måste punkten uppfylla ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ \qquad x_2 - x_3 = 1 \\ \quad x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}, \tag{9}$$

vilket vi kan representera på matrisform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Varje rad utgörs alltså av en ekvation i ekvationssystemet. Elementen i den första kolumnen representerar koefficienten framför x_1 i respektive ekvation, elementen i den andra kolumnen representerar koefficienten framför x_2 i respektive ekvation, elementen i den tredje kolumnen representerar koefficienten framför x_3 i respektive ekvation, elementen i den fjärde kolumnen representerar högerledet i respektive ekvation. Målet är att radreducera matrisen så att den får formen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & C \end{bmatrix},$$

eftersom denna matris representerar ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 = A \\ x_2 = B \\ x_3 = C \end{cases}.$$

Om vi lyckas med detta mål så kommer $x_1 = A$, $x_2 = B$, $x_3 = C$ lösa det ursprungliga ekvationssystemet (9), vilket innebär att punkten (A, B, C) är en gemensam punkt för de tre planen.

Dags att radreducera!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \Big[\text{Subtrahera första raden från tredje raden}\Big] \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Redan efter detta första steg kan vi faktiskt avbryta radreduceringen, eftersom de två nedersta raderna i matrisen motsäger varandra: Om en punkt (x_1, x_2, x_3) ligger på alla tre plan så säger ovanstående matris att punkten måste uppfylla både $x_2 - x_3 = 1$ och $x_2 - x_3 = -4$, vilket förstås inte är möjligt. **Slutsats:** De tre planen har inte någon punkt gemensamt.

Problem 1.2.4 (repetition)

Reducera matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

till *reduced echelon form*, det vill säga trappmatrisform. Ringa in pivotelementen i den ursprungliga matrisen och i den slutgiltiga matrisen, och lista pivotkolumnerna.

Problem 1.2.4 (repetition)

Reducera matrisen

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 3 & 5 & 7 & 9\\ 5 & 7 & 9 & 1\end{bmatrix}$$

till *reduced echelon form*, det vill säga trappmatrisform. Ringa in pivotelementen i den ursprungliga matrisen och i den slutgiltiga matrisen, och lista pivotkolumnerna.

Lösning: När vi radreducerar, låt oss först göra oss av med trean och femman i första kolumnen, så att bara den översta ettan kvarstår. Sedan gör vi oss av med sjuan längst ned i andra kolumnen.

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 3 & 5 & 7 & 9\\ 5 & 7 & 9 & 1\end{bmatrix} && \left[\text{Subtrahera } 3 * \text{första raden från den andra raden}\right]\\
\sim &\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 0 & -4 & -8 & -12\\ 5 & 7 & 9 & 1\end{bmatrix} && \left[\text{Subtrahera } 5 * \text{första raden från den tredje raden}\right]\\
\sim &\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 0 & -4 & -8 & -12\\ 0 & -8 & -16 & -34\end{bmatrix} && \left[\text{Subtrahera } 2 * \text{andra raden från den tredje raden}\right]\\
\sim &\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 0 & -4 & -8 & -12\\ 0 & 0 & 0 & -10\end{bmatrix} && \left[\text{Dividera andra raden med } -4 \text{ och sista raden med } -10\right]\\
\sim &\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Vi har ringat in pivot-elementen. Då vi inte arrangerade om några rader under radreduceringen, finnes pivot-elementen i den ursprungliga matrisen på exakt samma positioner:

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 3 & 5 & 7 & 9\\ 5 & 7 & 9 & 1\end{bmatrix}$$

Pivot-kolumnerna är precis de kolumner som innehåller pivot-element, det vill säga första, andra och fjärde kolumnen.

Vi avslutar med en observation. Precis som i föregående uppgift kan den ursprungliga matrisen tolkas som ett ekvationssystem

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 3 & 5 & 7 & 9\\ 5 & 7 & 9 & 1\end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases}1x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7\\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 9\\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 1\end{cases}$$

och syftet med att radreducera, syftet med att överföra matrisen på reducerad triangelmatrisform, *reduced echelon form*, är att den reducerade matrisen löser ovanstående ekvationssystem:

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases}1x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7\\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 3\\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1\end{cases}$$

Den nedersta ekvationen säger oss att $0 = 1$, vilket förstås är omöjligt. Ekvationssystemet är alltså inkonsekvent och har inte någon lösning.

Problem 1.2.13 (repetition)

Finn den allmänna lösningen på ekvationssystemet som motsvarar matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Problem 1.2.13 (repetition)

Finn den allmänna lösningen på ekvationssystemet som motsvarar matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Ekvationssystemet i fråga är

$$\begin{cases} 1x_1 - 3x_2 + 0x_3 - 1x_4 + 0x_5 = -2 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 4x_5 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 9x_5 = 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0 \end{cases},$$

vilket vi kan skriva på den enklare formen

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_4 = -2 \\ \qquad x_2 - 4x_5 = 1 \\ \qquad x_4 + 9x_5 = 4 \end{cases}.$$

Variabeln x_3 tillåts ha vilket värde som helst eftersom den inte förekommer i ekvationssystemet. Notera även att om vi fixerar värdet på x_5 så kommer värdena på variablerna x_1, x_2 och x_4 vara helt bestämda, eftersom[9]

$$\begin{cases} x_4 = 4 - 9x_5 \\ x_2 = 1 + 4x_5 \\ x_1 = 3x_2 + x_4 - 2 = \\ \quad = 3(1 + 4x_5) + (4 - 9x_5) - 2 = \\ \quad = 5 + 3x_5 \end{cases}.$$

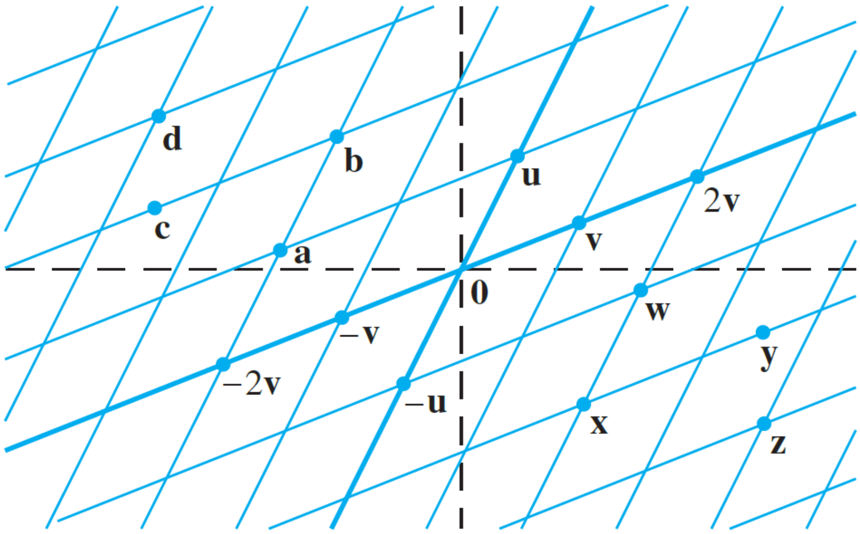
Den allmänna lösningen är därför

$$\begin{cases} x_1 = 5 + 3x_5 \\ x_2 = 1 + 4x_5 \\ x_3 \text{ fri variabel} \\ x_4 = 4 - 9x_5 \\ x_5 \text{ fri variabel} \end{cases}$$

[9] Vi hade även kunnat fixera värdet på x_4, i vilket fall värdena på x_1, x_2 och x_5 hade varit helt bestämda. Huvudsaken är att vi har två fria variabler.

Problem 1.3.8

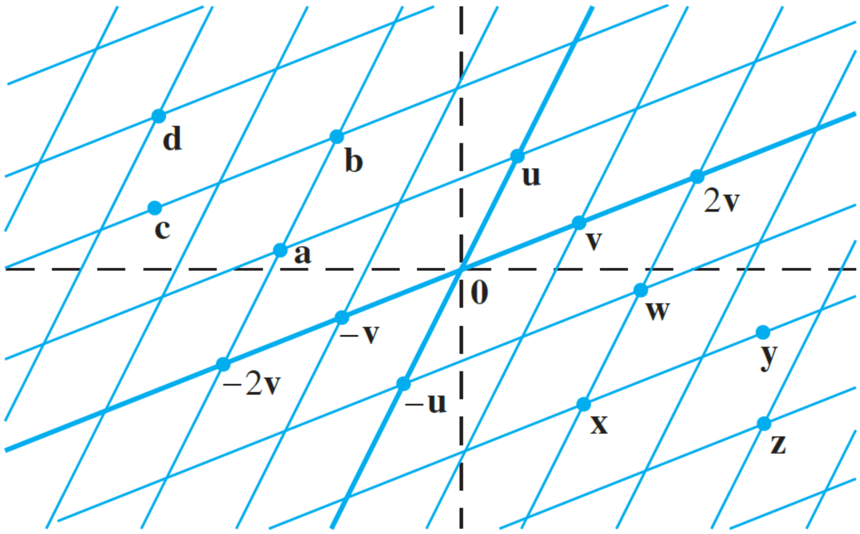
Använd följande figur för att skriva vektorerna $\mathbf{w}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ och $\mathbf{z}$ som linjärkombinationer av de två vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Är varje vektor i $\mathbb{R}^2$ en linjärkombination av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$?



Figur 19: Bild tagen från sida 32 i kursboken *Linear Algebra and Its Appliations* av Lay.

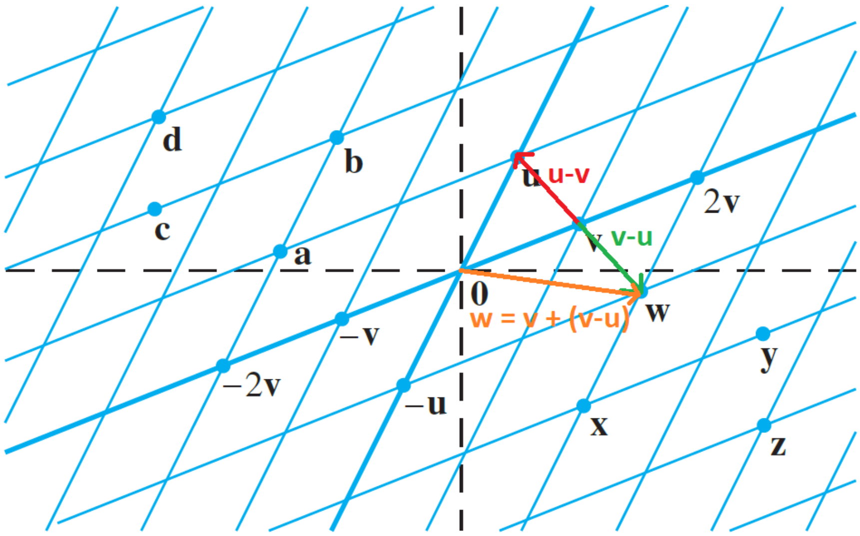
Problem 1.3.8

Använd följande figur för att skriva vektorerna **w**, **x**, **y** och **z** som linjärkombinationer av de två vektorerna **u** och **v**. Är varje vektor i $\mathbb{R}^2$ en linjärkombination av **u** och **v**?



Figur 20: Bild tagen från sida 32 i kursboken *Linear Algebra and Its Appliations* av Lay.

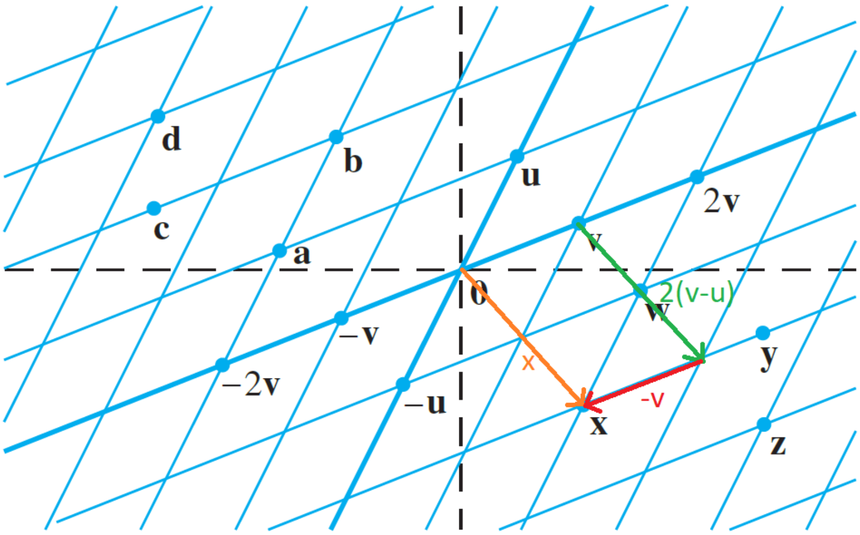
Lösning: Om vi befinner oss i punkten **v** (det vill säga vid spetsen av vektorn **v**) och vill ta oss till punkten **u** så kommer vektorn $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ att ta oss dit, eftersom $\mathbf{v} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u}$ (Figur 21). Om vi istället vill ta oss från punkten **v** till punkten **w** så behöver vi gå i motsatt riktning, vilket innebär att $\mathbf{w} = \mathbf{v} - (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{v} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = 2\mathbf{v} - \mathbf{u}$.



Figur 21

Om vi fortsätter förbi **w** till korsningspunkten mellan vektorerna **x** och **y**, och sedan går snett nedåt parallellt med **v**, så kommer vi till vektorn **x** (Figur 22). Detta innebär att

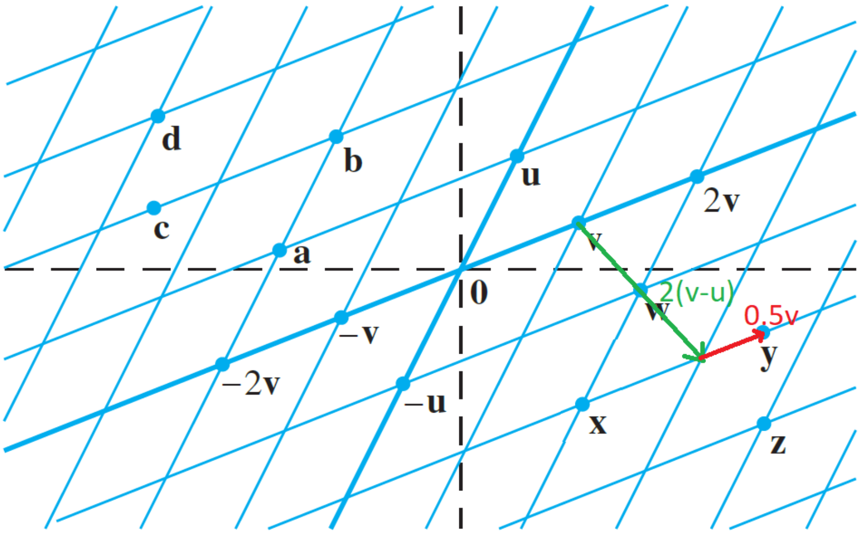
$$\mathbf{x} = \mathbf{v} + 2(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + (-\mathbf{v}) = 2(\mathbf{v} - \mathbf{u})$$



Figur 22

På samma sätt når vi vektorn **y** (Figur 23):

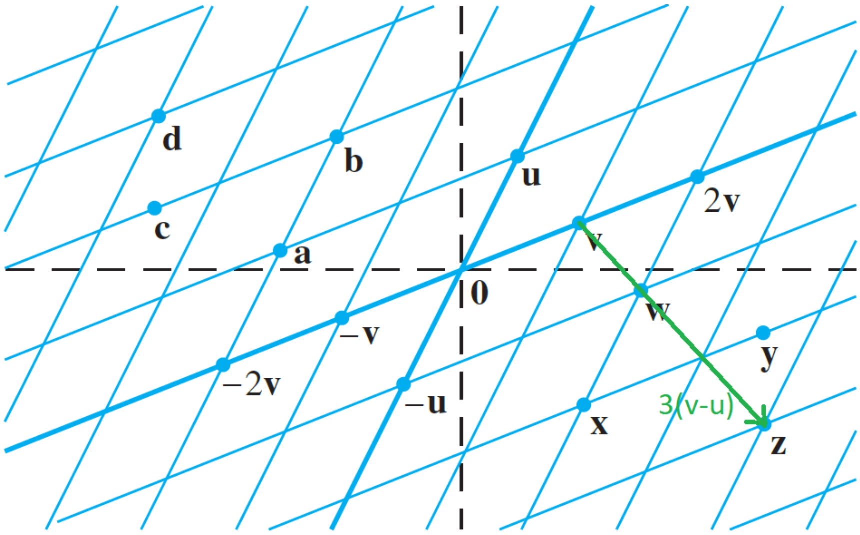
$$\mathbf{y} = \mathbf{v} + 2(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \frac{1}{2}\mathbf{v} = \frac{7}{2}\mathbf{v} - 2\mathbf{u}.$$



Figur 23

Den sista vektorn $\mathbf{z}$ är ännu enklare att nå (Figur 24):

$$\mathbf{z} = \mathbf{v} + 3(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = 4\mathbf{v} - 3\mathbf{u}.$$



Figur 24

Sammanfattningsvis har vi relationerna

$$\begin{cases} \mathbf{w} = 2\mathbf{v} - \mathbf{u} \\ \mathbf{x} = 2\mathbf{v} - 2\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \dfrac{7}{2}\mathbf{v} - 2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} = 4\mathbf{v} - 3\mathbf{u} \end{cases}.$$

Den sista frågan är huruvida varje vektor i $\mathbb{R}^2$ kan skrivas som en linjärkombination av **u** och **v**. Svaret på denna fråga är **Ja**, eftersom de två vektorerna är *linjärt oberoende.* Vi kommer snart lära oss mer om detta begrepp.

Problem 1.3.12

Betrakta vektorerna

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Avgör huruvida $\mathbf{b}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_3$.

Problem 1.3.12

Betrakta vektorerna

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Avgör huruvida $\mathbf{b}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_3$.

Lösning: Det finns flera sätt att lösa denna uppgift, man kan exempelvis ställa upp problemet som ett linjärt ekvationssystem: Vi vill finna konstanter x_1, x_2, x_3 sådana att

$$\begin{aligned} x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b} \quad &\leftrightarrow \quad x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ -7 \end{bmatrix} \\ &\leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1x_1 + 0x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 + 5x_2 + 0x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ -7 \end{bmatrix} \\ &\leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ -7 \end{bmatrix} \\ &\leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_3 = -5 \\ -2x_1 + 5x_2 = 11 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = -7 \end{cases} \end{aligned}$$

och vi kan lösa detta ekvationssystem genom att radreducera motsvarande matris:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ -2 & 5 & 0 & 11 \\ 2 & 5 & 8 & -7 \end{bmatrix} \quad \left[\text{Addera } 2 * \text{ första raden till andra raden}\right] \\ \sim &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & -7 \end{bmatrix} \quad \left[\text{Subtrahera } 2 * \text{ första raden från tredje raden}\right] \\ \sim &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De två nedersta raderna säger oss att $5x_2 + 4x_3 = 1$ och $5x_2 + 4x_3 = 3$. Eftersom dessa två ekvationer inte kan vara uppfyllda samtidigt, drar vi slutsatsen att $\mathbf{b}$ inte kan skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_3$.

Problem 1.3.18*

Låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

För vilka värden på h ligger vektorn $\mathbf{y}$ i planet som genereras av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$?

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition.* Siffrorna skiljer sig något från Problem 1.3.18 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Problem 1.3.18*

Låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

För vilka värden på h ligger vektorn $\mathbf{y}$ i planet som genereras av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$?

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 1.3.18 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Lösning: Vektorn $\mathbf{y}$ ligger i planet genererat av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ om och endast om vektorn $\mathbf{y}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{y} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 - 3x_2 = h \\ x_2 = -5 \\ -2x_1 + 8x_2 = -3 \end{cases}$$

Låt oss attackera problemet precis som i förra uppgiften, genom att radreducera följande matris:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 8 & -3 \end{bmatrix} && \left[\text{Addera } 2 * \text{första raden till den tredje raden}\right] \\ \sim &\begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 2h-3 \end{bmatrix} && \left[\text{Subtrahera } 2 * \text{andra raden från den tredje raden}\right] \\ \sim &\begin{bmatrix} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2h+7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Denna matris motsvarar ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = h \\ x_2 = -5 \\ 0 = 2h + 7 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = h + 3x_2 \\ x_2 = -5 \\ h = -\dfrac{7}{2} \end{cases}.$$

Vektorn $\mathbf{y}$ ligger alltså i planet genererat av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ om $h = -\frac{7}{2}$, och i så fall är

$$\mathbf{y} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{7}{2} + 3 * (-5)\right)\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2 = -\frac{37}{2}\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2.$$

Problem 1.4.18

Låt

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & -8 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Spänner kolonnerna hos B rummet $\mathbb{R}^4$? Har ekvationen $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$ en lösning för varje $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$?

Problem 1.4.18

Låt

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & -8 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Spänner kolonnerna hos B rummet $\mathbb{R}^4$? Har ekvationen $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$ en lösning för varje $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$?

Lösning: De två frågorna är ekvivalenta, om svaret på den ena frågan är Ja så är svaret på den andra frågan Ja och vice versa. Om kolonnerna $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$, $\mathbf{B}_4$ hos matrisen B spänner rummet $\mathbb{R}^4$, så betyder detta (per definition) att varje vektor $\mathbf{y}$ kan skrivas som en linjärkombination

$$\mathbf{y} = x_1\mathbf{B}_1 + x_2\mathbf{B}_2 + x_3\mathbf{B}_3 + x_4\mathbf{B}_4 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 - 5x_4 \\ 1x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 \\ -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 - 1x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & -8 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B\mathbf{x},$$

vilket innebär att varje vektor $\mathbf{y}$ kan skrivas på formen $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$. Ett liknande argument visar implikationen i andra riktningen, dvs. att om varje vektor $\mathbf{y}$ kan skrivas på formen $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$ så spänner kolonnerna hos matrisen B rummet $\mathbb{R}^4$.

Det räcker alltså att besvara en av frågorna - vi väljer den andra: Huruvida varje vektor $\mathbf{y}$ kan skrivas som en lösning på ekvationen $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$. Detta är ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{bmatrix} 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 - 5x_4 \\ 1x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 \\ -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 - 1x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = A \\ x_2 + x_3 - 5x_4 = B \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 = C \\ -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_4 = D \end{cases},$$

där vi har satt

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

för att betona att elementen i vektorn $\mathbf{y}$ antas vara *kända*. Idén är alltså att vi först fixerar en valfri vektor $\mathbf{y}$ och sedan försöker hitta en vektor $\mathbf{x}$ sådan att $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$, och frågan är huruvida det går att hitta en sådan vektor $\mathbf{x}$ oavsett vilken vektor $\mathbf{y}$ vi har valt. Ovanstående ekvationssystem kan i vanlig ordning lösas genom att radreducera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & A \\ 0 & 1 & 1 & -5 & B \\ 1 & 2 & -3 & 7 & C \\ -2 & -8 & 2 & -1 & D \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\text{Subtrahera första raden från den tredje raden}\end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & A \\ 0 & 1 & 1 & -5 & B \\ 0 & -1 & -1 & 5 & C-A \\ -2 & -8 & 2 & -1 & D \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\text{Addera andra raden till tredje raden}\end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & A \\ 0 & 1 & 1 & -5 & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C-A+B \\ -2 & -8 & 2 & -1 & D \end{bmatrix}$$

Den tredje raden säger att om vektorn

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

ska kunna skrivas på formen $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$ så måste den uppfylla ekvationen $C - A + B = 0$. Det finns oändligt många vektorer som inte uppfyller denna ekvation, exempelvis vektorn

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

så svaret är att inte alla vektorer kan skrivas på formen $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$.

Anmärkning: Vi hade inte behövt ha med vektorn $\mathbf{y}$ längst till höger i matrisen som vi radreducerade, det hade räckt att radreducera den ursprungliga matrisen B. Om man kan reducera en kvadratisk matris B till reducerad trappmatrisform med enbart ettor i diagonalen,

$$\begin{bmatrix} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

så är svaret på frågan **Ja**, varje vektor $\mathbf{y}$ kan skrivas på formen $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$. Om den radreducerade matrisen däremot har en rad som bara innehåller nollor så är svaret på frågan **Nej**.

Problem 1.4.36*

Låt

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Man kan visa att $3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$. Använd detta faktum (och inga radoperationer) för att hitta konstanter x_1 och x_2 som uppfyller ekvationen

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Problem 1.4.36*

Låt

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Man kan visa att $3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$. Använd detta faktum (och inga radoperationer) för att hitta konstanter x_1 och x_2 som uppfyller ekvationen

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Lösning: Vi börjar med att utföra matrismultiplikationen i ovanstående ekvation:

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 1x_2 \\ 5x_1 + 3x_2 \end{bmatrix},$$

och vi väljer nu att skriva om denna vektor som en linjärkombination:

$$\begin{bmatrix} 7x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 1x_2 \\ 5x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v}.$$

Den ursprungliga ekvationen (10) kan nu formuleras som

$$x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} = \mathbf{w},$$

vilket leder oss direkt till svaret $x_1 = 3$ och $x_2 = -5$, eftersom vi vet att $3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Problem 1.5.6

Skriv lösningsmängden för det homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

på parametrisk vektorform.

Problem 1.5.6

Skriv lösningsmängden för det homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

på parametrisk vektorform.

Lösning: Målet är att skriva lösningen på formen $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{v}x$ där x är en fri variabel. Ekvationssystemet kan representeras genom följande matris och som vanligt löser vi ekvationssystemet genom radreducering:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & 0 \\ -3 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left[\text{Subtrahera första raden från den andra raden}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left[\text{Addera } 3 * \text{ första raden till den tredje raden}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left[\text{Subtrahera } 2 * \text{ andra raden från den tredje raden}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left[\text{Subtrahera } 3 * \text{ andra raden från den första raden}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekvationssystemet lyder nu

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = 3x_3 \\ x_3 \text{ fri variabel} \end{cases}$$

vilket innebär att lösningen har formen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_3 \\ 3x_3 \\ 1x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_3.$$

Lösningens parametriska vektorform är alltså

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x,$$

dvs. $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Problem 1.6.6

När lösningar av natriumsulfat och bariumnitrat blandas, formas bariumfosfat och natriumnitrat. Den obalanserade ekvationen är

$$\mathrm{Na_3PO_4} + \mathrm{Ba(NO_3)_2} \to \mathrm{Ba_3(PO_4)_2} + \mathrm{NaNO_3}$$

För var och ett av dessa fyra ämnen, konstruera en vektor som listar antalet natrium-, fosfor-, syre-, barium- och kväveatomer. Använd sedan dessa vektorer för att balansera ekvationen.

Problem 1.6.6

När lösningar av natriumsulfat och bariumnitrat blandas, formas bariumfosfat och natriumnitrat. Den obalanserade ekvationen är

$$\mathrm{Na_3PO_4 + Ba(NO_3)_2 \to Ba_3(PO_4)_2 + NaNO_3}$$

För var och ett av dessa fyra ämnen, konstruera en vektor som listar antalet natrium-, fosfor-, syre-, barium- och kväveatomer. Använd sedan dessa vektorer för att balansera ekvationen.

Lösning: Det första ämnet, natriumfosfat, innehåller

- 3 st natriumatomer,
- 1 st fosforatom,
- 4 st syreatomer,
- 0 st bariumatomer,
- 0 st kväveatomer,

och motsvarar därför vektorn

$$\mathrm{Na_3PO_4} : \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

På precis samma sätt får vi resterande vektorer:

$$\mathrm{Ba(NO_3)_2} : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{Ba_3(PO_4)_2} : \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{NaNO_3} : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi vill ta reda på hur många molekyler av varje ämne som krävs för att balansera ekvationen och vi kan skriva detta problem på formen

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

där x_1 representerar antalet natriumsulfat-molekyler och så vidare. Om vi flyttar över alla vektorer till vänsterledet och sätter ihop dem till en enda stor vektor kan vi skriva om den balanserade ekvation på formen

$$\begin{bmatrix} 3x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 1x_4 \\ 1x_1 + 0x_2 - 2x_3 + 0x_4 \\ 4x_1 + 6x_2 - 8x_3 - 3x_4 \\ 0x_1 + 1x_2 - 3x_3 + 0x_4 \\ 0x_1 + 2x_2 + 0x_3 - 1x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem som kan lösas genom att radreducera följande matris:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -8 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\text{Placera den andra raden överst och fjärde raden näst överst}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & -8 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\text{Subtrahera } 3 * \text{ första raden från den tredje raden}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & -8 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\text{Subtrahera } 4 * \text{ första raden från den fjärde raden}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\text{Subtrahera } 6 * \text{ andra raden från den fjärde raden}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\text{Subtrahera } 3 * \text{ tredje raden från den fjärde raden}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\text{Subtrahera } 2 * \text{ andra raden från den femte raden}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[\text{Subtrahera tredje raden från den femte raden}\right]$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \\ 6x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Om vi sätter $x_3 = 1$ så får vi $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ och $x_4 = 6$. Den balanserade ekvationen är alltså

$$2Na_3PO_4 + 3Ba(NO_3)_2 \to Ba_3(PO_4)_2 + 6NaNO_3$$

Det är inte konstigt att vi får en fri variabel - tvärtom! Om man ser på den balanserade reaktionen som ett recept, och ämnena som ingredienser, anger den fria variabeln x_3 antalet satser vi bakar.

Läsvecka 4, Övning 1

Problem 1.7.14

Finn det värde h som gör följande vektorer linjärt beroende:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}.$$

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 1.7.14 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Problem 1.7.14

Finn det värde h som gör följande vektorer linjärt beroende:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}.$$

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 1.7.14 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Lösning: Ett sätt att lösa denna uppgift är att omformulera den som ett linjärt ekvationssystem. De tre vektorerna är (per definition) linjärt beroende om det existerar konstanter a_1, a_2, a_3, minst en av dem nollskild, sådana att

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

vilket visar sig vara ekvivalent med att hitta konstanter x_1, x_2 sådana att[10]

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Denna ekvation motsvarar det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 1 \\ -x_1 + 7x_2 = 1 \\ 3x_1 + 8x_2 = h \end{cases},$$

och som vanligt kan vi lösa detta ekvationssystem genom radreducering:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 3 & 8 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 23 & h-3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 23 & h-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & h-26 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & h-26 \end{bmatrix}.$$

Ekvationssystemet lyder nu

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 1 \\ 0 = h - 26 \end{cases},$$

och vi drar slutsatsen att en lösning existerar för $h = 26$. Indeed, man kontrollerar enkelt att

$$6 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 26 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad 6 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

[10] Konstanten a_3 kan inte vara lika med 0 eftersom de två första vektorerna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är linjärt oberoende. Vi kan därför dividera hela ekvation (11) med $-a_3$ och flytta över vektorn $\mathbf{v}_3$ till högerledet. Om vi sedan definierar $x_1 = -a_1/a_3$ och $x_2 = -a_2/a_3$ så får vi ekvation (12).

Problem 1.7.45

Antag att A är en $m \times n$-matris med egenskapen att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har högst en lösning för varje vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Använd definitionen av linjärt oberoende för att förklara varför kolumnerna i matrisen A måste vara linjärt oberoende.

Problem 1.7.45

Antag att A är en $m \times n$-matris med egenskapen att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har högst en lösning för varje vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Använd definitionen av linjärt oberoende för att förklara varför kolumnerna i matrisen A måste vara linjärt oberoende.

Lösning: Kalla kolonnvektorerna för $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$, det vill säga att

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}.$$

Definitionen av matrismultiplikation ger då att

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} x_n = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n.$$

Enligt problemformuleringen antar vi att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har högst en lösning $\mathbf{x}$ för varje $\mathbf{b}$, och detta antagande gäller i synnerhet nollvektorn $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Med andra ord har ekvationen

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \tag{13}$$

högst en lösning. Men vi känner redan till en sådan lösning: nollvektorn $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dvs.

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Det finns alltså ingen *annan* lösning på ekvation (13), det finns inga *andra* värden på skalärerna $x_1, \ldots, x_n$ som uppfyller ekvation (13), och per definition innebär detta att kolonnvektorerna $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ är linjärt oberoende.

Problem 1.8.2*

Låt

$$A = \begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & .5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Definiera funktionen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Hitta $T(\mathbf{u})$ och $T(\mathbf{v})$.

Problem 1.8.2*

Låt

$$A = \begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & .5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Definiera funktionen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Hitta $T(\mathbf{u})$ och $T(\mathbf{v})$.

Lösning: Uppgiften blir ganska enkel om man skriver ut matriserna och vektorerna explicit:

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & .5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5*1+0*0+0*(-4) \\ 0*1+.5*0+0*(-4) \\ 0*1+0*0+.5*(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = .5\mathbf{u}.$$

Vi behövde alltså bara utföra matrismultiplikationen. På samma sätt får vi

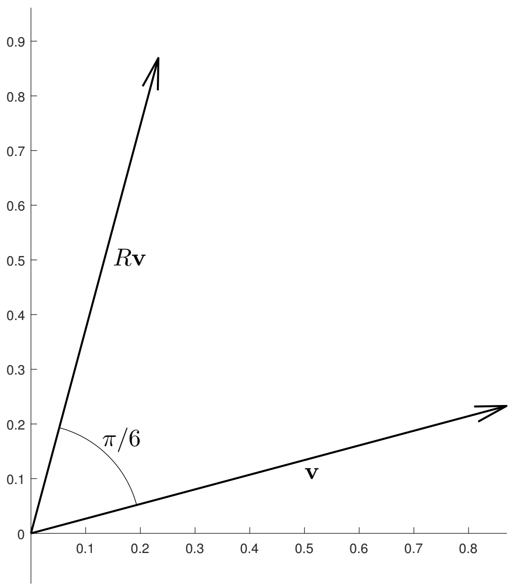
$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & .5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5*a+0*b+0*c \\ 0*a+.5*b+0*c \\ 0*a+0*b+.5*c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5a \\ .5b \\ .5c \end{bmatrix} = .5\mathbf{v}.$$

Vi är nu klara och du kan gå vidare till nästa uppgift, om du inte är nyfiken på lite...

Kuriosa: Tidigare har vi ofta tolkat matriser i termer av linjära ekvationssystem men denna uppgift visar en annan användning: matriser kan användas för att representera så kallade *linjära transformationer*, funktioner $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ som transformerar vektorer på ett linjärt vis. Om man exempelvis vill definiera en funktion $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som roterar en godtycklig vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ vinkeln $\pi/6$ radianer moturs, så kan man matrismultiplicera vektorn med rotationsmatrisen

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix}.$$

Med andra ord är $T(\mathbf{v}) = R\mathbf{v}$. Linjära transformationer används överallt inom så gott som alla matematikområden, så faktumet att matriser och linjära transformationer är två sidor av samma mynt gör matriser *väldigt* användbara.



Man kan exempelvis modellera kvantdatorer genom att låta ettor och nollor representeras av vektorer som vi kallar $|1\rangle$ resp. $|0\rangle$. Tillståndet hos en *qubit* representeras av en linjärkombination

$$|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle\,,$$

där a, b är komplexa tal. Olika värden på a och b ger olika tillstånd $|\psi\rangle$ och vi får information om vår qubit genom att undersöka vilket tillstånd den befinner sig i. Kvantdatorn utför beräkningar genom att multiplicera tillståndet $|\psi\rangle$ med vissa typer av matriser U, vilket alltså transformerar ett input-tillstånd $|\psi\rangle$ till ett output-tillstånd $|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle$. Om vi antar att

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad a\,|0\rangle + b\,|1\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

så kan en NOT-gate, som transformerar nollor till ettor och vice versa, skrivas som matrisen

$$U_{\text{NOT}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Indeed,

$$U_{\text{NOT}}\,|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0*1+1*0 \\ 1*1+0*0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle\,,$$

$$U_{\text{NOT}}\,|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0*0+1*1 \\ 1*0+0*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle\,.$$

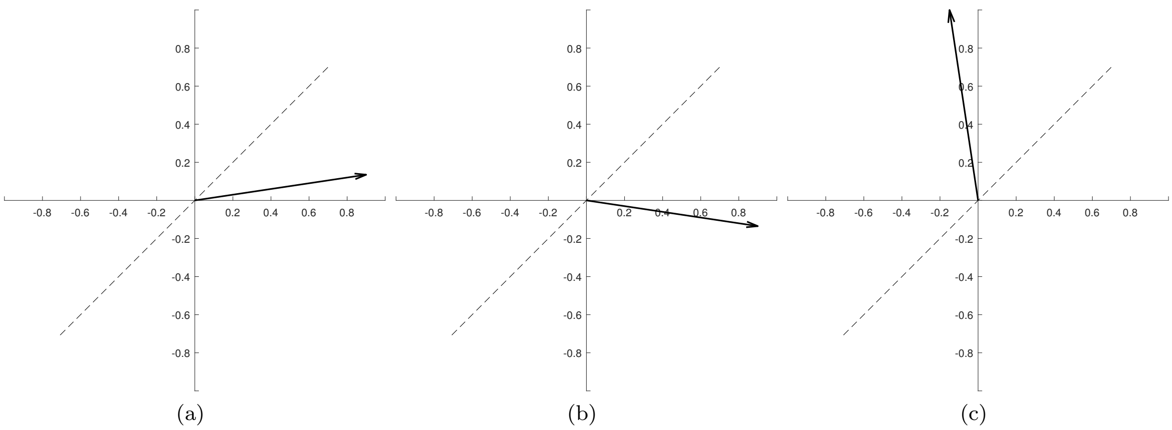
Datorer konstrueras mer eller mindre som en lång sekvens av NOT-gates, AND-gates, OR-gates och andra logiska portar som transformerar ettor och nollor, och i kvantdatorer modellerar man alltså dessa portar som olika linjära transformationer - vilket innebär matrismultiplikation.

Märks det att jag tycker det här är riktigt coolt? Linjära transformationer är guld värda.

Problem 1.9.8

Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära transformationen som först spegelvänder vektorer kring den horisontella x_1-axeln och sedan spegelvänder vektorerna kring linjen $x_2 = x_1$. Finn standardmatrisen för T.

Jag visste inte riktigt hur jag skulle översätta uppgiften till svenska på ett tydligt sätt, så låt mig illustrera den linjära transformationen i Figur 25. Först speglas en godtycklig vektor kring x_1-axeln ($(a) \to (b)$), sedan speglas vektorn kring den streckade linjen $x_2 = x_1$ ($(b) \to (c)$).

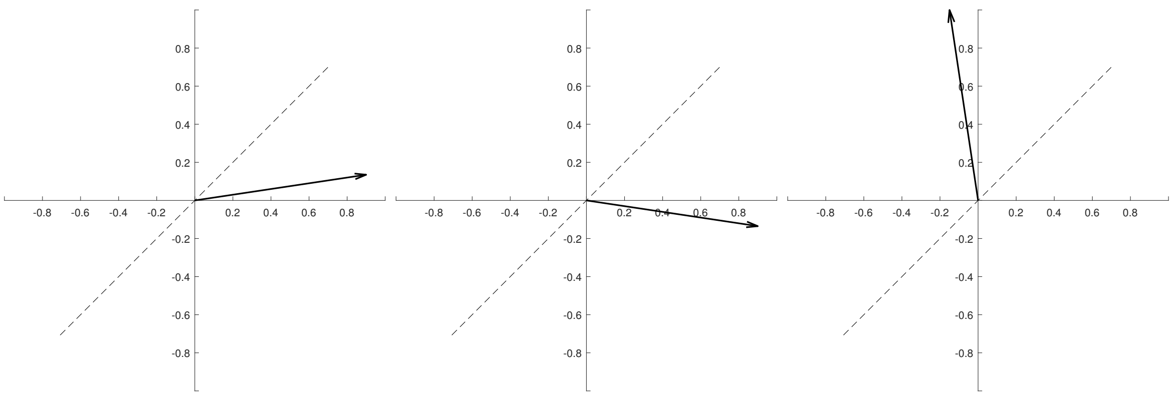


Figur 25

Problem 1.9.8

Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära transformationen som först spegelvänder vektorer kring den horisontella x_1-axeln och sedan spegelvänder vektorerna kring linjen $x_2 = x_1$. Finn standardmatrisen för T.

Jag visste inte riktigt hur jag skulle översätta uppgiften till svenska på ett tydligt sätt, så låt mig illustrera den linjära transformationen i Figur 26. Först speglas en godtycklig vektor kring x_1-axeln $((a) \to (b))$, sedan speglas vektorn kring den streckade linjen $x_2 = x_1$ $((b) \to (c))$.



(a) (b) (c)

Figur 26

Lösning: Låt oss kalla de två spegelvändningarna för A_1 och A_2. När vi spegelvänder en vektor

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

kring x_1-axeln så byter vi tecken på x_2-koordinaten utan att ändra värdet på x_1-koordinaten:

$$A_1 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

Vi vill kunna skriva denna transformation med hjälp av matrismultiplikation, och vi måste därför hitta passande värden på matriselementen så att

$$A_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

Hur gör man egentligen för att lista ut hur matrisen ska se ut? Det kan vara utmanande, särskilt om matrisen är stor, så man får titta på många exempel och med tiden utveckla en känsla för hur matriser fungerar. Efter ett tag har man tillräckligt god koll på matrismultiplikation för att kunna reverse engineera matrisen. Ett tips är att matriser på formen

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

multiplicerar x-koordinaten hos en vektor $\mathbf{v}$ med a och multiplicerar y-koordinaten med b:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a * x + 0 * y \\ 0 * x + b * y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \end{bmatrix}.$$

Vi ville att matrisen A_1 skulle lämna x_1-koordinaten orörd och byta tecken på x_2-koordinaten, så vi kunde vi använda ovanstående matris med $a = 1$ och $b = -1$.

Låt oss nu titta på den andra transformationen, A_2. Vad som händer när vi spegelvänder en vektor kring linjen $x_2 = x_1$ är att vi byter plats på de två koordianterna:

$$A_2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Se till exempel $(b) \to (c)$ i Figur 26. Denna transformation representeras av matrisen

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

eftersom denna matris byter plats på koordinaterna:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 * x + 1 * y \\ 1 * x + 0 * y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Om vi vill spegelvända en vektor kring x_1-axeln och sedan spegla den resulterande vektorn kring linjen $x_2 = x_1$, så börjar vi med att multiplicera vektorn med A_1 och sedan multiplicerar vi den resulterande vektorn med A_2. Med andra ord beräknar vi $\mathbf{v} \mapsto A_1\mathbf{v} \mapsto A_2A_1\mathbf{v}$. Istället för att betrakta detta som två separata transformationer så kan vi beräkna matrisprodukten $A = A_2A_1$ och se transformationen $\mathbf{v} \mapsto A_1\mathbf{v} \mapsto A_2A_1\mathbf{v}$ som en enda transformation $\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$:

$$A = A_2A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 * 1 + 1 * 0 & 0 * 0 + 1 * (-1) \\ 1 * 1 + 0 * 0 & 1 * 0 + 0 * (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta är alltså standardmatrisen för transformationen T som utför de två speglingarna.

Kuriosa: Standardmatrisen ovan kan tolkas som

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{bmatrix},$$

vilken är matrisen som roterar en vektor $\pi/2$ radianer moturs. Se $(a) \to (c)$ i Figur 26.

Problem 1.9.??

Avgör huruvida transformationen

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 5x_2 + 4x_3, x_2 - 6x_3) = A\mathbf{x}$$

är injektiv (one-one) samt surjektiv (onto).

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition* men finns inte med i *Lay, 6th edition.*

Problem 1.9.??

Avgör huruvida transformationen

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 5x_2 + 4x_3, x_2 - 6x_3) = A\mathbf{x}$$

är injektiv (one-one) samt surjektiv (onto).

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition* men finns inte med i *Lay, 6th edition.*

Lösning: När vi skriver $\mathbf{x}$ och $T(\mathbf{x})$ som kolonnvektorer så kan vi hitta standardmatrisen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A\mathbf{x} = T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - 5x_2 + 4x_3 \\ x_2 - 6x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1 - 5x_2 + 4x_3 \\ 0x_1 + 1x_2 - 6x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

det vill säga

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Theorem 12 på sida 78 säger att den linjära transformationen T är

(a) injektiv om och endast om standardmatrisens kolonnvektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ är linjärt oberoende.

(b) surjektiv om och endast om standardmatrisens kolonnvektorer spänner $\mathbb{R}^2$, det vill säga om och endast om varje vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ kan skrivas som en linjärkombination

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3. \tag{14}$$

Låt oss därför undersöka dessa frågor. Transformationen är alltså surjektiv om ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = a \\ \qquad\quad x_2 - 6x_3 = b \end{cases}$$

har en lösning för varje vektor

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

och vi kan undersöka detta genom radreducering:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 & a \\ 0 & 1 & -6 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -26 & a - 5b \\ 0 & 1 & -6 & b \end{bmatrix}.$$

Ekvationssystemet blir alltså

$$\begin{cases} x_1 - 26x_3 = a - 5b \\ x_2 - 6x_3 = b \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} x_1 = 26x_3 + a - 5b \\ x_2 = 6x_3 + b \end{cases},$$

vilket har en lösning för varje värde på den fria variabeln x_3. Transformationen är surjektiv.

Transformationen är däremot inte injektiv, vilket ovanstående ekvationssystem avslöjar. Om vi låter $\mathbf{b}$ vara nollvektorn genom att sätta $a = b = 0$, och om vi sedan sätter $x_3 = 1$, så får vi att

$$26\mathbf{a}_1 + 6\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = 26 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ekvationen $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ implicerar alltså inte att $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, det finns andra, nollskilda lösningar på ekvationen. Kolonnvektorerna är därför inte linjärt oberoende, och enligt Theorem 12(a) är transformationen T alltså inte injektiv.

Sammanfattning: Transformationen är surjektiv men inte injektiv.

Läsvecka 4, Övning 2

Problem 2.1.6

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Beräkna matrisprodukten AB på två olika sätt: först genom att dela upp matrisen B i sina kolonnvektorer $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ och beräkna $A\mathbf{b}_1$ och $A\mathbf{b}_2$ var för sig, sedan via rad-kolumn formeln

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Problem 2.1.6

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Beräkna matrisprodukten AB på två olika sätt: först genom att dela upp matrisen B i sina kolonnvektorer $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ och beräkna $A\mathbf{b}_1$ och $A\mathbf{b}_2$ var för sig, sedan via rad-kolumn formeln

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Lösning: Den första metoden ger kolonnvektorerna

$$A\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4*1 & + & (-2)*2 \\ (-3)*1 & + & 0*2 \\ 3*1 & + & 5*2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 13 \end{bmatrix},$$

$$A\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4*3 & + & (-2)*(-1) \\ (-3)*3 & + & 0*(-1) \\ 3*3 & + & 5*(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -9 \\ 4 \end{bmatrix},$$

så matrisprodukten är

$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 14 \\ -3 & -9 \\ 13 & 4 \end{bmatrix}.$$

Den andra metoden ger matriselementen

$$\begin{aligned}
(AB)_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 4*1 + (-2)*2 &&= 0, \\
(AB)_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 4*3 + (-2)*(-1) &&= 14, \\
(AB)_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = (-3)*1 + 0*2 &&= -3, \\
(AB)_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = (-3)*3 + 0*(-1) &&= -9, \\
(AB)_{31} &= a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} = 3*1 + 5*2 &&= 13, \\
(AB)_{32} &= a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} = 3*3 + 5*(-1) &&= 4,
\end{aligned}$$

så matrisprodukten är återigen

$$AB = \begin{bmatrix} (AB)_{11} & (AB)_{12} \\ (AB)_{21} & (AB)_{22} \\ (AB)_{31} & (AB)_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 14 \\ -3 & -9 \\ 13 & 4 \end{bmatrix}.$$

Personligen tycker jag att den första metoden är snabbast och enklast, men det är en smaksak. I vilket fall som helst är de två metoderna förstås mycket nära relaterade.

Problem 2.1.30

Visa att om kolonnerna i matrisen B är linjärt beroende, så är kolonnerna i matrisen AB också linjärt beroende.

Problem 2.1.30

Visa att om kolonnerna i matrisen B är linjärt beroende, så är kolonnerna i matrisen AB också linjärt beroende.

Lösning: Eftersom kolonnvektorerna $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ till matrisen B är linjärt beroende så existerar skalärer $r_1, \ldots, r_n$ sådana att minst en skalär $r_i \neq 0$ och

$$r_1\mathbf{b}_1 + \cdots + r_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}.$$

Matrisen AB har kolonnvektorerna $A\mathbf{b}_1, \ldots, A\mathbf{b}_n$ och enligt Theorem 2 på sida 99 är matrismultiplikation en så kallad linjär operation, vilket innebär att vi kan göra följande omskrivningar:

$$r_1A\mathbf{b}_1 + \cdots + r_nA\mathbf{b}_n = A(r_1\mathbf{b}_1) + \cdots + A(r_n\mathbf{b}_n) = A(\underbrace{r_1\mathbf{b}_1 + \cdots + r_n\mathbf{b}_n}_{\mathbf{0}}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Linjärkombinationen i vänsterledet är alltså lika med nollvektorn, så kolonnvektorerna till AB är linjärt beroende.

Problem 2.2.28

Antag att P är en inverterbar matris och att $A = PBP^{-1}$. Hitta ett uttryck för B i termer av A.

Problem 2.2.28

Antag att P är en inverterbar matris och att $A = PBP^{-1}$. Hitta ett uttryck för B i termer av A.

Lösning: Eftersom matrisen P är inverterbar gäller att $PP^{-1} = I$ och $P^{-1}P = I$. Vi kan därför bli av med faktorn P^{-1} i uttrycket PBP^{-1} genom att högermultiplicera med P:

$$A = PBP^{-1} \quad \iff \quad AP = (PBP^{-1})P = PB(P^{-1}P) = PBI = PB.$$

På samma sätt blir vi av med faktorn P i uttrycket PB genom att vänstermultiplicera med P^{-1}:

$$AP = PB \quad \iff \quad P^{-1}AP = P^{-1}(PB) = (P^{-1}P)B = IB = B.$$

Uttrycket vi söker är alltså

$$B = P^{-1}AP.$$

Problem 2.2.39

Om den existerar, finn inversen till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Använd algoritmen som introducerades i detta kapitel.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition.* Siffrorna skiljer sig något från Problem 2.2.39 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Problem 2.2.39

Om den existerar, finn inversen till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Använd algoritmen som introducerades i detta kapitel.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition*. Siffrorna skiljer sig något från Problem 2.2.39 i *Lay, 6th edition*, men lösningsmetoden är densamma.

Lösning: För säkerhets skull börjar vi med att kontrollera att matrisen faktiskt är inverterbar. Ett sätt att undersöka detta är att beräkna dess determinant - ett koncept med geometrisk tolkning som vi egentligen inte tar upp förrän nästa vecka. Det finns nämligen en viktig sats som säger att en (kvadratisk) matris är inverterbar om och endast om dess determinant är nollskild. Determinanten av en 2×2-matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

beräknas kort sagt med formeln $\det A = ad - bc$, vilket i vårt fall blir

$$\det A = 5 * 7 - 10 * 4 = 35 - 40 = -5 \neq 0.$$

Vi drar slutsatsen att vår matris är inverterbar.

Låt oss nu tillämpa den algoritm som presenteras på sida 110: Om en matris A är inverterbar så kommer matrisen $[A, I]$, där elementen i A placeras bredvid elementen i identitetsmatrisen I, vara radekvivalent med matirisen $[I, A^{-1}]$. Allt vi behöver göra är alltså att radreducera.

$$[A, I] = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/5 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/5 & 0 \\ 0 & -1 & -4/5 & 1 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 4/5 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7/5 & 2 \\ 0 & 1 & 4/5 & -1 \end{bmatrix} = [I, A^{-1}]$$

Inversen ges alltså av

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Låt oss bekräfta detta genom att beräkna matrisprodukterna $AA^{-1} = I$ och $A^{-1}A = I$:

$$AA^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 * (-7) + 10 * 4 & 5 * 10 + 10 * (-5) \\ 4 * (-7) + 7 * 4 & 4 * 10 + 7 * (-5) \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$A^{-1}A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} (-7) * 5 + 10 * 4 & (-7) * 10 + 10 * 7 \\ 4 * 5 + (-5) * 4 & 4 * 10 + (-5) * 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Problem 2.3.6

Avgör huruvida matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

är inverterbar. Använd så få beräkningar som möjligt, men rättfärdiga ditt svar.

Problem 2.3.6

Avgör huruvida matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

är inverterbar. Använd så få beräkningar som möjligt, men rättfärdiga ditt svar.

Lösning: The Invertible Matrix Theorem på sida 145 ger oss många olika metoder för att kontrollera huruvida matrisen är inverterbar. En sådan metod är att kontrollera om matrisen har en pivot-position för varje rad. Radreducering ger att

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Denna matris har ingen pivot-position på sista raden, så matrisen kan inte vara inverterbar.

Läsvecka 5, Övning 1

Problem 2.8.??

Låt

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Avgör huruvida $\mathbf{u}$ ligger i Nul A.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition* men finns inte med i *Lay, 6th edition*.

Problem 2.8.??

Låt

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Avgör huruvida $\mathbf{u}$ ligger i Nul A.

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition* men finns inte med i *Lay, 6th edition.*

Lösning: Vektorn $\mathbf{u}$ ligger i nollrummet till A om $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$, så låt oss beräkna produkten.

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3)*(-2) & + & (-2)*3 & + & 0*1 \\ 0*(-2) & + & 2*3 & + & (-6)*1 \\ 6*(-2) & + & 3*3 & + & 3*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Svaret är alltså **Ja**, vektorn $\mathbf{u}$ ligger i nollrummet till matrisen A.

Problem 2.8.34

Låt A vara följande matris tillsammans med dess reducerade trappstegsform:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 3 & 9 \\ -2 & 2 & -2 & 7 & 5 \\ -5 & 9 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finn en bas för Col A samt en bas för Nul A.

Problem 2.8.34

Låt A vara följande matris tillsammans med dess reducerade trappstegsform:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 3 & 9 \\ -2 & 2 & -2 & 7 & 5 \\ -5 & 9 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finn en bas för Col A samt en bas för Nul A.

Lösning: Att finna en bas för kolonnrummet är en enkel uppgift, Theorem 13 på sida 152 säger nämligen att pivotkolonnerna formar en sådan bas:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

För att finna en bas till nollrummet behöver vi undersöka lösningarna till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Den reducerade matrisen ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 7x_3 + 6x_5 = 0 \\ \quad\quad 2x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 0 \\ \quad\quad\quad\quad\quad x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -3x_3 - 2.5x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 1.5x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$$

där x_3 och x_5 är fria parametrar (vi hade såklart kunnat välja två andra fria parametrar). Varje lösning till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kan därför skrivas som en linjärkombination

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -2.5 \\ -1.5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

vilket innebär att

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2.5 \\ -1.5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

utgör en bas för nollrummet.

Problem 2.8.40*

Om R är en 6×6-matris och Nul R *inte* är det triviala delrummet, vad kan man säga om Col R?

Problem 2.8.40*

Om R är en 6×6-matris och Nul R *inte* är det triviala delrummet, vad kan man säga om Col R?

Lösning: Om nollrummet inte är det triviala delrummet så måste det innehålla fler vektorer än bara nollvektorn; det måste finnas minst en vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ som uppfyller $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Annorlunda uttryckt existerar fler än en lösning på ekvationen $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$, vilket i sin tur innebär att motsvarande linjära ekvationssystem har minst en fri parameter. Matrisen R kommer därför *inte* ha följande typ av radreducering:

$$R \not\sim \begin{bmatrix} 1 & a & b & c & d & e \\ 0 & 1 & f & g & h & i \\ 0 & 0 & 1 & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & m & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

istället kommer radreduceringen se ut exempelvis såhär:

$$R \sim \begin{bmatrix} 1 & a & b & c & d & e \\ 0 & 1 & f & g & h & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & j & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Vi ser att det finns kolonner som inte är pivotkolonner. Eftersom pivotkolonnerna utgör en bas för kolonnrummet Col A så måste detta ha färre än 6 st basvektorer; kolonnrummets *dimension*[11] är strikt mindre än 6.

Dimensionen på *nollrummet*, å andra sidan, är antalet fria parametrar, och vi får en fri parameter för varje kolonn som *inte* är en pivotkolonn. Anledningen är att den radreducerade matrisen (15) kan radreduceras ytterligare till

$$R \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & p & 0 & q & 0 \\ 0 & 1 & r & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

och ekvationen $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är därför ekvivalent med ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & p & 0 & q & 0 \\ 0 & 1 & r & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + px_3 + qx_5 = 0 \\ x_2 + rx_3 + sx_5 = 0 \\ x_4 + tx_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -px_3 - qx_5 \\ x_2 = -rx_3 - sx_5 \\ x_3 \text{ fri variabel} \\ x_4 = -tx_5 \\ x_5 \text{ fri variabel} \\ x_6 = 0 \end{cases}.$$

[11]Begreppet *dimension* introduceras i kapitel 2.9 och definieras som antalet element i en bas. Dimensionen på kolonnrummet är alltså antalet pivotkolonner.

Detta är förstås bara ett exempel, men det illustrerar ett allmänt faktum: De komponenter som svarar mot pivotkolonner (x_1, x_2, x_4, x_6 i vårt fall), kan skrivas i termer av de komponenter (x_3, x_5) som *inte* svarar mot pivotkolonner, och dessa blir våra fria parametrar.

Sammanfattning: Antalet fria parametrar = antalet ej pivotkolonner. Vi får därför relationen

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Col} R + \dim \operatorname{Nul} R &= \text{antalet pivotkolonner} + \text{antalet fria parametrar}\\ &= \text{antalet pivotkolonner} + \text{antalet ej pivotkolonner}\\ &= \text{totala antalet kolonner} = 6.\end{aligned}$$

Detta är ett allmänt resultat kallat the *rank-nullity theorem* eftersom det relaterar dimensionen på kolonnrummet (the *rank*) till dimensionen på nollrummet (the *nullity*): Om R är en godtycklig $m \times n$-matris så är

$$\dim \operatorname{Col} R + \dim \operatorname{Nul} R = n.$$

Problem 2.8.42*

Om P är en 5×5-matris och Nul P är det triviala delrummet, vad kan du säga om lösningarna på ekvationen $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ för $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$?

Problem 2.8.42*

Om P är en 5×5-matris och Nul P är det triviala delrummet, vad kan du säga om lösningarna på ekvationen $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ för $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$?

Lösning: Om Nul P är det triviala delrummet så innehåller ekvationssystemet $P\mathbf{x} = \mathbf{0}$ inga fria parametrar, så varje kolonn i matrisen P är en pivotkolonn. För varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$ kommer vi därför få radreduceringen

$$[P, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & P_{15} & b_1 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{25} & b_2 \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} & P_{35} & b_3 \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} & P_{45} & b_4 \\ P_{51} & P_{52} & P_{53} & P_{54} & P_{55} & b_5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e \end{bmatrix}$$

för några siffror a, b, c, d, e som beror på vilken vektor $\mathbf{b}$ vi har valt. Ekvationen $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har därför den unika lösningen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix}.$$

Notera att det inte spelar någon roll att P är en 5×5-matris, det enda som krävs är att matrisen är kvadratisk (eftersom vi behöver exakt ett pivotelement per rad och kolonn). Vi kan alltså dra samma slutsats för alla kvadratiska matriser: Om P är en $n \times n$-matris och Nul P är det triviala delrummet så har ekvationen $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en unik lösning för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Ett annat sätt att komma fram till samma resultat är att tillämpa the invertible matrix theorem: om P är en $n \times n$-matris och Nul P är det triviala delrummet så har ekvationen $P\mathbf{x} = \mathbf{0}$ inga fria parametrar; ekvationen har bara den triviala lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. The invertible matrix theorem säger därför att matrisen P är inverterbar, så för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ har ekvationen $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ den unika lösningen $\mathbf{x} = P^{-1}\mathbf{b}$.

Ett tredje sätt att få information om lösningarna till $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är att använda faktumet att matrismultiplikation är en linjär operation: Antag att $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ är två lösningar på samma ekvation $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Då är

$$P(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = P\mathbf{x}_1 - P\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Vektorn $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ är alltså en lösning på ekvationen $P\mathbf{x} = \mathbf{0}$ men eftersom Nul P är det triviala delrummet så existerar bara en enda lösning på denna ekvation, nämligen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Det följer att $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. Detta säger oss att *om* ekvationen $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en lösning så är den lösningen unik, det finns inte fler lösningar, men det säger inte om lösningen existerar från första början.

Problem 2.9.3

Låt

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Vektorn $\mathbf{x}$ ligger i ett vektorrum H med bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Hitta koordinaterna för vektorn $\mathbf{x}$ i denna bas.

Problem 2.9.3

Låt

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Vektorn $\mathbf{x}$ ligger i ett vektorrum H med bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Hitta koordinaterna för vektorn $\mathbf{x}$ i denna bas.

Lösning: Uppgiften säger alltså att vektorn $\mathbf{x}$ kan skrivas som en linjärkombination

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2,$$

och vi ombeds hitta värdena på skalärerna c_1 och c_2. Dessa skalärer kallas också för *koordinaterna* för vektorn $\mathbf{x}$ i basen $\mathcal{B}$. Ovanstående linjärkombination kan tolkas som ekvationen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix},$$

så vi kan lösa problemet genom radreducering:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 7 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Lösningen är alltså $c_1 = 7$ och $c_2 = 5$, vilket funkar finfint:

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Problem 2.9.12

Låt A vara följande matris tillsammans med dess reducerade trappstegsform:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 3 \\ 5 & 10 & -9 & -7 & 8 \\ 4 & 8 & -9 & -2 & 7 \\ -2 & -4 & 5 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finn en bas för Col A samt en bas för Nul A, och bestäm dimensionerna hos dessa två delrum.

Problem 2.9.12

Låt A vara följande matris tillsammans med dess reducerade trappstegsform:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 3 \\ 5 & 10 & -9 & -7 & 8 \\ 4 & 8 & -9 & -2 & 7 \\ -2 & -4 & 5 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finn en bas för Col A samt en bas för Nul A, och bestäm dimensionerna hos dessa två delrum.

Lösning: Kom ihåg att pivotkolonnerna ger en bas för kolonnrummet:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -9 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Kolonnrummet har alltså en bas innehållandes tre stycken basvektorer, så dess dimension är 3.

För att hitta en bas för nollrummet tittar vi på lösningarna till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Den reducerade matrisen ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \\ -5x_5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 5x_4 \\ x_3 = 2x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

med de fria variablerna x_2 och x_4. Varje lösning till denna ekvation kan alltså skrivas som

$$\mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

så de två vektorerna

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

utgör en bas för nollrummet. Detta rum har således dimension 2.

Problem 2.9.??

Vad är rangen hos en 4×5-matris vars nollrum är tredimensionellt?

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition* men finns inte med i *Lay, 6th edition*.

Problem 2.9.??

Vad är rangen hos en 4×5-matris vars nollrum är tredimensionellt?

OBS: Uppgiften är tagen från *Lay, 5th edition* men finns inte med i *Lay, 6th edition.*

Lösning: Rangen hos en $m \times n$-matris A definieras som dimensionen på kolonnrummet,

$$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Col} A,$$

så vi kan använda oss av the rank theorem[12] på sida 159:

$$\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{Nul} A = n.$$

Vår matris har 5 kolonner och nollrummet har dimension 3, så

$$\operatorname{rank} A = n - \dim \operatorname{Nul} A = 5 - 3 = 2.$$

[12]Som vi beskrev i en tidigare uppgift kallas detta resultat även the rank-nullity theorem.

Problem 2.9.32*

Konstruera en 4×3-matris med rank 1.

Problem 2.9.32*

Konstruera en 4×3-matris med rank 1.

Lösning: Rangen hos en matris är dimensionen på kolonnrummet och vi vet att pivotkolonnerna utgör en bas för detta rum, så uppgiften ber oss att konstruera en 4×3-matris med en enda pivotkolonn. Min filosofi är att den bästa lösningen är en enkel lösning, så vi behöver inte göra något mer avancerat än att ta följande matris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$