Lecture_3.3_vektorer_spannet_alice

den 23 november 2020 07:32

Lecture_3.3_vektorer_spannet

Vectorer, spannet av vektorer, lösningsmängd av ett ekvationssystem.

Begrepp som diskuteras i det kapitlet.

- **Vektorer, addition och multiplikation med skalärer. Geometrisk tolkning.**
- **Linjär kombination av en uppsättning vektorer**
- **Spannet eller linjära höljet av en uppsättning vektorer**
- **Linjärt ekvationssystem på vektor form.**
- **Lösningsmängd av ett ekvationssystem.**

Vektorer

$\vec{v} = (a_1, \ldots a_n) \in \mathbb{R}^n$

Definition. Kolonnvektorer (eller kortare - vektorer) är kolonn-matriser $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix}$ med n element a_k, $k = 1, ..., n$ som är reella (eller komplexa) tal. Mängden av vektorer med n reella komponenter a_k betecknas med $\mathbb{R}^n$ (er -n). $\square$

Mängden av vektorer med n komplexa komponenter betecknas med $\mathbb{C}^n$ (se -n).

Nollvektor. Det finns en speciell vektor i $\mathbb{R}^n$ som har alla komponenter lika med noll och betecknas med $\mathbf{0}$.

Geometrisk tolkning av vektorer.

Exempel på sådana vektorer är $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 12 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ som kan illustreras med hjälp av "geometriska vektorer" i planet $\mathbb{R}^2$ och i rummet $\mathbb{R}^3$ med hjälp av ett cartesiskt koordinatsystem i planet och i rummet.

Vi väljer en punkt i planet med koordinater $(1, -3)$ och ritar en pil mellan origo och den punkten för att illustrera vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. På samma sätt väljer vi en punkt i rummet med koordinater $(-2, 3, 5)$ och ritar en pil mellan origo och den punkten för att illustrera vektor $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

★Vi kan tänka på ett liknande geometriskt sätt om vektorer i rummet $\mathbb{R}^n$ med antalet koomponenter $n > 3$ större än tre, men kan inte rita dem.

Definition. För ett par vektorer $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \ldots \\ u_n \end{bmatrix}$ och $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \ldots \\ w_n \end{bmatrix}$ med samma antal komponenter definieras addition och multiplikation med en skalär (reell eller komplex) på följande sätt:

$$\mathbf{u}+\mathbf{w} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} u_1+w_1 \\ \dots \\ u_n+w_n \end{bmatrix}.$$

som vi kommer ihåg från liknande beräkningar för matriser i Matlabb.

Multiplikation med skalär c definieras också som komponentvis multiplikation.

$$c\mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} cu_1 \\ \dots \\ cu_n \end{bmatrix}$$

□

Algebraiska egenskaper hos $\mathbb{R}^n$

i)$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{U}$	v) $c(\mathbf{u}+v)=c\mathbf{u}+cv$
ii) $(\mathbf{u}+v)+w=\mathbf{u}+(v+w)$	vi) $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$
iii) $\mathbf{u}+0=0+\mathbf{u}=\mathbf{u}$	vii) $c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$
iv) $\mathbf{u}+(-1)\mathbf{u}=\mathbf{u}-\mathbf{u}=0$	viii) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Dessa egenskaper följer direkt från liknande egenskaper hos reella tal (eller komplexa i fall vi betraktar vektorer ur $\mathbb{C}^n$)

Definitionen av vektrorrum.

Vektorrum är en mängd $\mathcal{H}$ med två operationer - addition $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ och multiplikation med skalärer $c\mathbf{u}$, definierade för alla dess element $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}$ (vektorer) så att $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathcal{H}$, $c\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ så att addition och multiplikation med skalärer satisfierar algebraiska egenskaper i tabellen ovan.

□

$\mathbb{R}^n$ är det vanligaste exemplet av vektorrum.

Linjär kombination av vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Exempel.

Betrakta två vektorer i planet: $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och dess **linjär kombination** $u = 3v_1 + (-2)v_2$ med koefficienterna 3 och (-2). Beräkningen efter definitionen ger

$$u = 3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Geometriska bilden med den **linjära kombinationen** och med några andra med olika koefficienter visas på bilden där man ser att parallellogramregeln gäller för vektorer i $\mathbb{R}^2$.

$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\alpha = 7$, $\beta = 3$

$\bar{w} = 7\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2$

Example :

$V = \mathcal{P}_n = \{ p(x) \,/\, p(x) = a_n x^n + \dots a_0$
$a_i \in \mathbb{R}, \partial p_n \leq n \}$

$p_n + q_n$ well defined in V

αp_n , $\alpha \in \mathbb{R}$

? $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ is a linear comb. of $\bar{v}_1$ & $\bar{v}_2$?

? $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}}_{\vec v_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}}_{\vec v_2} + \begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\end{pmatrix}}$$

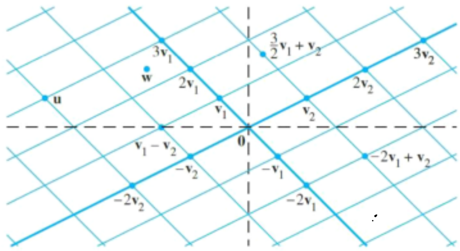


FIGURE 8 Linear combinations of $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$.

Definition

Betrakta en uppsättning vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ,..., $\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$och skalärer (reella tal) c_1, c_2, ..., c_p. Vektorn definierad av

$$y = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_p\mathbf{v}_p = \sum_{k=1}^{p} c_k\mathbf{v}_k$$

kallas linjär kombination av vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ,..., $\mathbf{v}_p$. □

Exempel.

Vektorer $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{r} = \begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$, har en linjär kombination

$$2\mathbf{v} + (-1)\mathbf{w} + 3\mathbf{r} = 2\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\14\\1\end{bmatrix}$$

■

?

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\7\\3\end{pmatrix}}_{w} \neq \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Det finns naturligtvist oändligt många linjära kombinationer av samma vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ,..., $\mathbf{v}_p$ med olika tal c_1, c_2, ..., c_p.

Definition.

Mängden $S\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_p\}$av alla linjära kombinationer $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_p\mathbf{v}_p$ av givna vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ,..., $\mathbf{v}_p$ kallas **spannet** eller **linjära höljet** av dessa vektorer.□

$$[\vec v_1, \vec v_2, \vec v_3] = [\vec v_1, \vec v_2] = [\vec v_1]$$

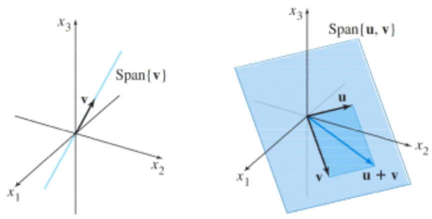
$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix}5\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Exempel.

Geometrisk beskrivning av spannet i enkla fall.

Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är två vektorer i $\mathbb{R}^n$ som inte är multipla av varandra (parallella eller antiparallella i geometriska termer)

så är spannet $S\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ett plan genom origo som innehåller bode $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Se en illustration på bilden.



$S\{\vec v_1, \vec v_2 ... \vec v_n\}$

$\vec a = \alpha_1\vec v_1 + ... \alpha_n \vec v_n \in S\{\vec v_1 ... \vec v_n\}$

$\vec b = \beta_1 \vec v_1 + ... + \beta_n \vec v_n \in S\{\vec v_1 ... \vec v_n\}$

$\vec a + \vec b = (\alpha_1 + \beta_1)\vec v_1 + ... + (\alpha_n + \beta_n)\vec v_n \in S\{\vec v_1, .., \vec v_n\}$

$\lambda \vec a = (\lambda\alpha_1)\vec v_1 + ... + (\lambda\alpha_n)\vec v_n \in S\{\vec v_1, .. \vec v_n\}$

$\vec 0 \in S\{\vec v_1 .. \vec v_n\}$ □

Exempel.

Exempel med vektorekvation.

Betrakta vektorer $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\-2\\-5\end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}2\\5\\6\end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}7\\4\\-3\end{bmatrix}$

Bestäm om $\mathbf{b}$ kan representeras som linjär kombination av $\mathbf{a}_1$och $\mathbf{a}_2$, d.v.s om det finns tal x_1 och x_2 sådana att

$$\boxed{x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}}$$

eller

$$x_1\begin{bmatrix}1\\-2\\-5\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\4\\-3\end{bmatrix}.$$

Vi använder definitioner för multiplikation med skalär och för addition av vektorer och får:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Vi använder definitioner för multiplikation med skalär och för addition av vektorer och får:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -5x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 5x_2 \\ 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ -5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Detta ger oss ett system av tre linjära ekvationer med två obekanta x_1 och x_2.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -3 \end{aligned}$$

Detta system kan lösas med hjälp av Gausselimination. Utvidgade matrisen för systemet är

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Matris-vector produkt och matris-ekvation.

Definition av matris-vektorprodukt

Definition

Om A är en $m \times n$ matris med kolonner $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ,...,$\mathbf{a}_n$ och $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ produkten $A\mathbf{x}$ definieras som linjär kombination av kolonner i A med koefficienter som är elementen från vecktorn $\mathbf{x}$

$$A\mathbf{x} = \underbrace{[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, , ..., \mathbf{a}_n]}_{1\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}}_{n\times 1} = \underbrace{x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + ... + x_n\mathbf{a}_n}_{1\times 1}$$

$$A_{n\times n} \, X_{n\times 1} = b_{n\times 1}$$

Exempel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}}_{3\times 1} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 21 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}}_{2\times 1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{2\times 1} \underbrace{[a_1 \;\; a_2]}_{1\times 2} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1a_1 & x_1a_2 \\ x_2a_1 & x_2a_2 \end{bmatrix}}_{2\times 2}$$

4

Beräkningen av produkten Ax med rad-kolonn multiplikation och addition.

En mera effektiv metod att beräkna matris-vektor produkt följer från observationen att beräkningen i exemplet kunde skrivas om som

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 7 \\ 0 \cdot 4 + (-5) \cdot 3 + 3 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Den observationen låter formulera snabbare metoden med **rad-kolonn regeln**

Om produkten Ax är definierad (matrisen har samma antal kolonner som antal elementen vektorn)

så r $i-$te elementet i produkten Ax lika med summan av produkter av motsvarande element i raden i och from hela vektorn x.

Egenskaper hos matris-vektor produkt.

Sats (Theorem 5 sid 55 i Lay)

Om A är en $m \times n$ matris, $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer ur $\mathbb{R}^n$ och c är en skalär då gäller

a. $A(\mathbf{u} + \mathbf{v})) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$

b. $A(c\mathbf{v}) = cA\mathbf{v}$

Bevis för fallet $n = 3$ kan ges som en övning

■

Matris ekvation

Vi betraktar en matrisekvation på formen

$$\boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

där A är en given $m \times n$ matrix med kolonnerna $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, , ..., \mathbf{a}_n] = A$ och $\mathbf{b}$ är en vektor ur $\mathbb{R}^m$.Okänd vektor x sökes i $\mathbb{R}^n$, så att produkten $A\mathbf{x}$ är definierad.

Definitionen på matris - vektor produkt som linjär kombination av kolonnerna $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, , ..., \mathbf{a}_n]$ ur A medför att matrisekvationen ovan och vektorekvationen där A är en given $m \times n$ matrix med kolonnerna $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, , ..., \mathbf{a}_n] = A$ och $\mathbf{b}$ är en vektor ur $\mathbb{R}^m$.Okänd vektor x sökes i $\mathbb{R}^n$, så att produkten $A\mathbf{x}$ är definierad.

Definitionen på matris - vektor produkt som linjär kombination av kolonnerna $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, , ..., \mathbf{a}_n]$ ur A medför att matrisekvationen ovan och vektorekvationen

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + ... + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

är faktiskt samma ekvation och de har samma mängd av lösningar, eller lösningsmängd. (Theorem 3, sid. 52 i Lay)

Detta medför en lämplig omformulering av matrisekvationen.(sid. 60 i Lay) som i sin tur följer från Sats1.2.2, sid. 37 i Lay. (**Formulate it!**)

Ekvationen $Ax = b$ **har en lösning** $\boxed{\textbf{om och endast}}$ **om** b **är en linjär kombination av kolonner i** A.

□

Lay
Chapter1

$Ax = b$ consistent $\Leftrightarrow$ Echolon form of the augmented matrix $[A|B]$ has no row of the form $[0\ 0 \dots 0|b]$ with $b \neq 0$.

$Ax = b$ consistent $\Rightarrow$ $\begin{cases} 1) \text{ unique solution} \\ \text{OR} \\ 2) \text{ infinite solutions} \therefore \text{ free parameters (at least 1)} \end{cases}$

5

Satsen om 4 ekvivalenta kriterier för existensen av lösningar för alla högerled.

Nästa sats ger 4 ekvivalenta kriterier för lösbarheten av ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Theo

Sats 1.4.4 i Lay, s. 53, bevis s. 56

Låt A vara en $m \times n$ matrix. Följande påståenden är ekvivalenta, d.v.s gäller eller inte gäller bara samtidigt.

a. För varje $b \in R^m$ **finns en lösning till ekvationen** $Ax = b$.

b. varje $b \in R^m$ **är linjär kombination av kolonner i** A

c. Spannet av kolonner ur A **utgör hela** R^m,eller Span $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n\} = \mathbb{R}^m$.

d. matrisen A **har ett pivot element i varje rad.**

□

Span

$[a_1, \dots a_n] = \mathbb{R}^m$

Bevis - är en övning på att komma ihåg Gauss elimination och definitioner på linjär kombination, spannet och matris-vektor produkt.

Bevis

Påståenden (a), (b), (c) är ekvivalenta enligt definition av matris vektor produkt, linjär kombination och spannet av vektorer. Det räcker då att bevisa att d. är ekvivalent med a.

Låt U vara trappstegsmatris som fås från A med hjälp av Gauss elimination. Trappstegsmatrisen som svarar mot utvidgade matrisen $[A, \mathbf{b}]$ har formen $[U, \mathbf{d}]$ med någon kolonn $\mathbf{d}$ som är resultat av Gauss elimination tillämpad på högerledet $\mathbf{b}$ i ursprungliga matrisen $[A, \mathbf{b}]$:

$$[A, \mathbf{b}] \curvearrowright \overset{Gauss}{\cdots} \curvearrowright [U, \mathbf{d}]$$

I fall då (d) gäller och A har en pivot position i varje rad, kan $[U, \mathbf{d}]$ se ut som följande matris:

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * & * & * & \dots & * & * & d_1 \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & \dots & * & * & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & \dots & * & * & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \dots & * & * & d_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \blacksquare & * & d_m \end{bmatrix}.$$

Echolon form

Detta medför att systemet har några lösningar för varje högerled och (a) gäller.

Om (d) är fel, så innehåller åtminstone sista raden i U bara nollor. Det är eftersom man flyttar alla nollrader neråt vid Gauss elimination. Vi väljer ett högerled $\mathbf{d}$ i transformerade systemet $U\mathbf{x} = \mathbf{d}$ med utvidgade trappstegsmatrisen $[U, \mathbf{d}]$ som har 1 i $\mathbf{d}$ i sista raden:

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * & * & * & \dots & * & * & d_1 \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & \dots & * & * & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & \dots & * & * & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \dots & * & * & d_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I det fallet får vi ett system $U\mathbf{x} = \mathbf{d}$ där sista ekvationen som svarar sista radet i $[U, \mathbf{d}]$ är olösbart: $0 = 1$.

Ursprungliga systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är naturligtvist också olösbart i det fallet eftersom de är ekvivalenta. Detta visar att (a) och (d) är ekvivalenta: de gäller bara samtidigt.■

Lösningsmängder av linjära ekvationssystem

Man är ofta intresserad av hur ser ut **mängden av alla lösningar eller lösningsmängden** till en ekvation. Vi betraktar här lösningsmängder till ekvationer $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

OBS! Lägg märke till skillnaden mellan två matematiska begrepp: **allmän lösning och lösningsmängd.**

Allmän lösning är **en formel** med möjligtvist något antal godtyckliga konstanter (t.ex. fria variabler)

Lösnignsmängd är en **delmängd** i $\mathbb{R}^n$, den består av **vektorer** eller punkter ur $\mathbb{R}^n$. Det kan vara ett plan eller en rät linje, eller en "större" delmängd i $\mathbb{R}^n$ om $n > 3$, eller hela $\mathbb{R}^n$.

Allmän lösning är ett sätt att framställa alla vektorer (punkter) ur **lösningsmängden** med hjälp av en formel.

Linjära homogena system

Vi börjar med att betrakta homogena ekvationenr med högerledet lika med nollvektor,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$\cancel{A\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

där A är en $m \times n$ matrix och $\mathbf{x} \in R^n$

Homogena systemet har alltid en nolllösning $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Den lösning kallas ofta för **trivial lösning**. Andra lösningar kallas **icketriviala.**

Följande kriteriet har stor praktisk mening.

Homogen ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har en icke trivial lösning om och endast om ekvationssystemet har åtminstone en fri variabel.

EXAMPLE 1 Determine if the following homogeneous system has a nontrivial solution. Then describe the solution set.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$A\mathbf{x} = \bar{0}$

$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$

$[\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3] = [\bar{v}_1, \bar{v}_2]$

$-\frac{4}{3}\bar{v}_1 = 1\,\bar{v}_3$

SOLUTION Let A be the matrix of coefficients of the system and row reduce the augmented matrix $[\,A \quad \mathbf{0}\,]$ to echelon form:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Since x_3 is a free variable, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has nontrivial solutions (one for each choice of x_3). To describe the solution set, continue the row reduction of $[\,A \quad \mathbf{0}\,]$ to *reduced* echelon form:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 \quad - \tfrac{4}{3}x_3 &= 0 \\ x_2 \quad\quad &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Solve for the basic variables x_1 and x_2 and obtain $x_1 = \frac{4}{3}x_3$, $x_2 = 0$, with x_3 free. As a vector, the general solution of $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has the form

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_3\mathbf{v}, \quad \text{where } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Here x_3 is factored out of the expression for the general solution vector. This shows that every solution of $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ in this case is a scalar multiple of $\mathbf{v}$. The trivial solution is obtained by choosing $x_3 = 0$. Geometrically, the solution set is a line through $\mathbf{0}$ in $\mathbb{R}^3$. See Figure 1. ■

Parametrisk vektor form för lösningar till homogena system

EXAMPLE 2 A single linear equation can be treated as a very simple system of equations. Describe all solutions of the homogeneous "system"

$$\boxed{10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0} \tag{1}$$

SOLUTION There is no need for matrix notation. Solve for the basic variable x_1 in terms of the free variables. The general solution is $x_1 = .3x_2 + .2x_3$, with x_2 and x_3

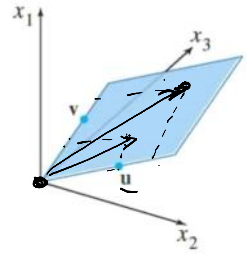
8

free. As a vector, the general solution is

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .3x_2 + .2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .3x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} .2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \underset{\alpha}{x_2} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{u}}}{\begin{bmatrix} .3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + \underset{\beta}{x_3} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{v}}}{\begin{bmatrix} .2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad \text{(with } x_2, x_3 \text{ free)} \qquad (2)$$

This calculation shows that every solution of (1) is a linear combination of the vectors **u** and **v**, shown in (2). That is, the solution set is Span {**u**, **v**}. Since neither **u** nor **v** is a scalar multiple of the other, the solution set is a plane through the origin. See Figure 2. ■



$$\pi = \left[\overset{\bar{u}}{\begin{pmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{\bar{v}}{\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right] =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right]$$

Satsen om framställning av allmän lösning som summan av allmänna lösningen till homogena systemet och en partikulär lösning.

Example. Ange en framställning av alla lösningar till ekvationssystemet $Ax = b$ med $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Lösning. Betrakta utvidgade matrisen som svarar mot systemet och genomför Gauss elimination på det:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Echolon form

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{4}{3}x_3 &= -1 \\ x_2 &= 2 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3 - 1 \\ 2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{p} + x_3\mathbf{v}$$

Formeln

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}; \quad t \in \mathbb{R}}$$

beskriver lösningsmängden på parametrisk vektor form.

Uttrycket $t\mathbf{v}$; $t \in \mathbb{R}$ ger **allmän lösning till homogena ekvationen,** och $\mathbf{p}$ är en **partikulär lösning** till inhomogena ekvationen.

Lägg märke till att vi kunde välja annan (godtycklig) partikulär lösning till systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, till exempel

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} + 3\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

och skriva allmän lösning som

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{q} + t\mathbf{v}; \quad t \in \mathbb{R}}$$

Lösningsmängden i det fallet är en rak linje genom punkten med samma koordinater som $\mathbf{p}$ (eller $\mathbf{q}$) - vektor och parallell med $\mathbf{v}$ vektor.■

Sats 1.5.6 i Lay, sid. 63

Theo 6: $Ax=b$ consistent for b $\Rightarrow$ The solution set for $Ax=b$ is the set of all vectors $\underbrace{w = p + v_h}$, where $Av_h = \vec{0}$

Låt ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vara lösbart för någon vektor $\mathbf{b}$ och vektor $\mathbf{p}$ vara en godtycklig partikulär lösning.

Då är lösningsmängden till den ekvationen består av alla vektorer på formen $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$ där $\mathbf{v}_h$ representerar alla lösningar till homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Bevis. (Exercise 25 i sektionen)

Låt $\mathbf{w}$ vara en godtycklig lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Definiera $\mathbf{v}_h = \mathbf{w} - \mathbf{p}$. Två ekvationer är uppfyllda: $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$ och $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$.

Med att subtrahera dem från varandra observera att $A(\mathbf{w} - \mathbf{p}) = \mathbf{0}$ och då $A\mathbf{v}_h = 0$. Det visar att alla lösningar till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har formen $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$ där $\mathbf{p}$ är en godtycklig partikulär lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och $\mathbf{v}_h$ är en lösning till homogena ekvationen $A\mathbf{x} = 0$. Vi har visat att vilken som helst lösning $\mathbf{w}$ kan representeras som summan $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$ ovan.

Å andra sidan, om vi tar en vektor som har den formen: $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$ där $\mathbf{p}$ är en partikulär lösning, d.v.s. $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$ och $\mathbf{v}_h$ uppfyller linjära systemet $A\mathbf{v}_h = 0$, då måste $\mathbf{w}$ uppfylla inhomogena ekvationen eftersom $A\mathbf{w} = A\mathbf{p} + A\mathbf{v}_h = \mathbf{b} + 0 = \mathbf{b}$.

■

Å andra sidan, om vi tar en vektor som har den formen: $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$ där $\mathbf{p}$ är en partikulär lösning, d.v.s. $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$ och $\mathbf{v}_h$ uppfyller linjära systemet $A\mathbf{v}_h = 0$, då måste $\mathbf{w}$ uppfylla inhomogena ekvationen eftersom $A\mathbf{w} = A\mathbf{p} + A\mathbf{v}_h = \mathbf{b} + 0 = \mathbf{b}$.

■

Recept för att få fram allmän lösning på parametrisk vektor form

Betrakta ett linjärt ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

1. Radreducera utvidgade matrisen $[A, b]$ till trappstegsmatris eller till reducerad trappstegsmatris.
2. Framställ varje basvariable med hjälp av fria variabler med hjälp av reducerad trappstegsmatris eller med hjälp av Gauss Jordans tillbakasubstitution.
3. Framställ typisk lösning $\mathbf{x}$ som vektor med komponenter beroende av fria variabler om sådana finns (annars blir det bara en entydig lösning)
4. Dela upp framställningen för $\mathbf{x}$ i linjär kombination av konstanta vektorer med koefficienter som är fria variabler.

Exempel.

1. Each of the following equations determines a plane in $\mathbb{R}^3$. Do the two planes intersect? If so, describe their intersection.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 &= 9 \end{aligned}$$

SOLUTIONS TO PRACTICE PROBLEMS

1. Row reduce the augmented matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & 8 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -9 & 18 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

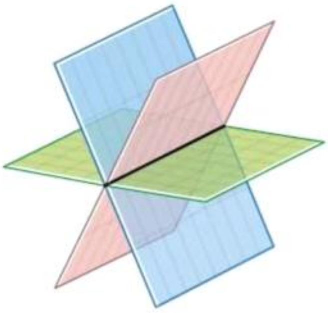
$$\begin{aligned} x_1 \quad + 3x_3 &= 4 \\ x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Thus $x_1 = 4 - 3x_3$, $x_2 = -1 + 2x_3$, with x_3 free. The general solution in parametric vector form is

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 3x_3 \\ -1 + 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underset{\mathbf{p}}{\underset{\uparrow}{\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}} + x_3 \underset{\mathbf{v}}{\underset{\uparrow}{\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

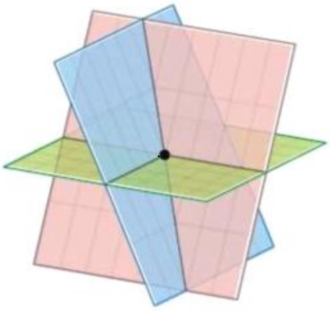
The intersection of the two planes is the line through **p** in the direction of **v**.

Illustrationer till Supplementary exercises 3. Chapter 1 i Lay som svarar mot ett linjärt system med tre obekanta variabler.



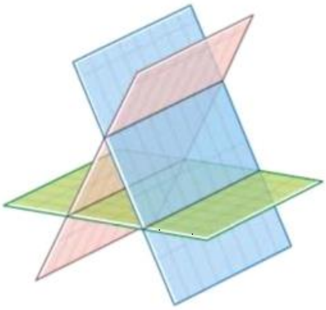
Three planes intersecting in a line

(a)



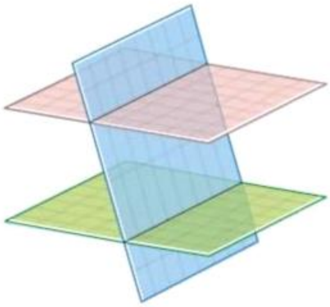
Three planes intersecting in a point

(b)



Three planes with no intersection

(c)



Three planes with no intersection

(c')