Exercise 30

Systemet som ska lösas är

$$u_{xx} = u_{tt} + q(x) \iff u_{xx} - q(x) = u_{tt} \tag{1a}$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1 \tag{1b}$$
$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 0, \tag{1c}$$

där $q(x) = 1$. Observera är att följande system har icke homogena boundary-conditions ($u(1,t) = 1$). Ytterligare, differentialekvationen är icke homogen då det finns en källterm ($q(x)$). Sammantaget, då homogena boundary-conditions och en homogen PDE krävs för variabelseperationsmetoden går det **inte** att lösa Eq. 1 med variabelseperation.

Strategin vi använder för att lösa Eq. 1 är att ansätta att lösningen är på formen $u(x,t) = v(x,t) + s(x)$. Insättande av denna ansats i Eq. 1 ger

$$v_{xx} + s_{xx} - q(x) = v_{tt} \tag{2a}$$
$$v(0,t) + s(0) = 0, \quad v(1,t) + s(1) = 1 \tag{2b}$$
$$v(x,0) + s(x) = x, \quad v_t(x,0) = 0. \tag{2c}$$

Genom att nu sätta $s_{xx} - q(x) = 0$ och att $s(0) = 0, s(1) = 1$ försvinner källtermen ur Eq. 2a. Ytterligare, $v(x,t)$ kommer få homogena boundrary conditions. Sammantaget, dessa krav på $s(x)$ resulterar i att lösningen till $u(x,t)$ kan erhållas genom att lösa en ODE

$$\begin{aligned} &s_{xx} - \underbrace{q(x)}_{=1} = 0 \\ &s(0) = 0, \quad s(1) = 1 \end{aligned} \tag{3}$$

och ett homogent PDE-system

$$v_{xx} = v_{tt} \tag{4a}$$
$$v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0 \tag{4b}$$
$$v(x,0) = x - s(x), \quad v_t(x,0) = 0. \tag{4c}$$

Sammantaget, genom att ansätta en lösningen på formen $u(x,t) = v(x,t) + s(x)$, och därefter ställa krav ($s_{xx} - q = 0, s(0) = 0, s(1) = 1$) reducerar problemtet att lösa för $u(x,t)$ till; lös en ODE (Eq. 3) och lös en PDE (Eq. 4) med variabelseperation.

Om vi börjar med ODE:n (Eq. 3), lösningen erhålls genom att integrera två gånger och därefter stoppa in randvilkoren. Detta resulterar i

$$s(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} \tag{5}$$

Angående PDE:n (Eq. 4), ansätt $v(x,t) = X(x)T(t)$. Genom att sätta in denna ansats i systemet och dividera med $X(x)T(t)$ erhålls

$$\frac{T_{tt}(t)}{T(t)} = \frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = \lambda = -\mu^2 \tag{6}$$

Att kvoterna är lika med konstant följer från att likheten ska gälla för alla t och x i lösningsspannet. Ytterligare, $\lambda = -\mu^2$ sätts som en positiv konstant för att vi ska erhålla realistiska lösningar (vågor). Eq. 6 belyser att $X(x)$ och $T(t)$ erhålls från att lösa två ODE:er

$$X_{xx} + \mu^2 X = 0 \implies X(x) = A_n\cos(\mu x) + B_n\sin(\mu x) \tag{7a}$$
$$T_{tt} + \mu^2 T = 0 \implies T(t) = C_n\cos(\mu t) + D_n\sin(\mu t). \tag{7b}$$

Vilket betyder att

$$v(x,t) = X(x)T(t) = \big(A_n\cos(\mu x) + B_n\sin(\mu x)\big)\big(C_n\cos(\mu t) + D_n\sin(\mu t)\big), \tag{8}$$

där konstanterna A_n, B_n, C_n, D_n och μ erhålls från rand- och initialvilkoren. Om vi börjar med första randvilkoret får vi att (notera att nedan används $\cos(0) = 1$ och $\sin(0) = 0$)

$$0 = v(0,t) = A_n\big(C_n\cos(\mu t) + D_n\sin(\mu t)\big) \implies A_n = 0, \tag{9}$$

ty $A_n = 0$ är enda sättet $v(0,t) = 0$ för alla t. Det andra randvilkoret ger att

$$0 = v(1,t) = B_n sin(\mu)\big(C_n\cos(\mu t) + D_n\sin(\mu t)\big) \implies \mu = n\pi,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

då $B_n = 0$ är en lösning vi inte är intresserade av (vi vill att $v(x,t) \neq 0$). Då varje $n = 1, 2, \ldots$ löser Eq. 4 vet vi att den allmänna lösningen för $v(x,t)$ enligt superpositionsprincipen ges av

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\tilde{C}_n\cos(n\pi t) + \tilde{D}_n\sin(n\pi t)\big)\sin(n\pi x) \tag{11}$$

med tidsderivata (notera att vi bara deriverar varje term i summan)

$$v_t = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi\big(-\tilde{C}_n\sin(n\pi t) + \tilde{D}_n\cos(n\pi t)\big)\sin(n\pi x) \tag{12}$$

där $\tilde{C}_n = C_n B_n$ och $\tilde{D}_n = D_n B_n$. Dessa två kvarvarande konstanterna erhålls genom initialvilkoren. Det första initialvilkoret ger att

$$\begin{aligned} v(x,0) = x - s(x) = \frac{x(x-1)}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \big(\tilde{C}_n \underbrace{\cos(0)}_{=1} + \tilde{D}_n \underbrace{\sin(0)}_{=0}\big)\sin(n\pi x) \implies \\ \frac{x(x-1)}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n sin(n\pi x). \end{aligned} \tag{13}$$

Sammantaget, Eq. 13 visar att $\tilde{C}_n$ är Fourier-koefficienterna till sinus-serien för $f(x) = x(x-1)/2$ med perioden $L = 1$, d.v.s

$$\tilde{C}_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x = \frac{2}{1}\int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}\sin(n\pi x)\mathrm{d}x = \frac{2\big((-1)^n - 1\big)}{n^3\pi^3}. \tag{14}$$

Det andra initial-villkoret ger att

$$
\begin{aligned}
v_t(x,0) = 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} n\pi\big(-\tilde{C}_n \underbrace{\sin(0)}_{=0} + \tilde{D}_n \underbrace{\cos(0)}_{=1}\big)\sin(n\pi x) \\
\implies 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{D}_n \sin(n\pi x) \implies D_n = 0.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Notera att $D_n = 0$ då Fourier-koefficienter till $f(x) = 0$ är 0. Givet Eq. 14 och 15 erhålls att

$$
v(x,t) = \frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^3}\cos(n\pi t)\sin(n\pi x). \tag{16}
$$

Då vår sökta lösning $u(x,t) = s(x) + v(x,t)$ erhålls därför att

$$
u(x,t) = \frac{-x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^3}\cos(n\pi t)\sin(n\pi x). \tag{17}
$$