

TMA683 Tillämpad matematik

Övningsuppgifter

2 november 2020

Fardin Saedpanah's version of this document from spring 2020 is acknowledge.

1. LINJÄRA RUM, SKALÄRPRODUKT OCH L_p -NORMER

1.1 För ett heltal a , betrakta de delmängder av $\mathcal{P}^{(a)}(0, 1)$ som består av alla polynom

$p(t)$ av grad $\leq q$ sådana att

a) $2p(0) = p(1)$

b) $p(t) \geq 0$

c) $p(t) = p(1 - t)$ för alla t .

Vilka av dessa delmängder är underrum i $\mathcal{P}^{(a)}(0, 1)$?

1.2 Visa att $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ är en bas för $\mathcal{P}^{(2)}(\mathbb{R})$ då

a) $p_1(t) = (t + 1)^2$, $p_2(t) = (t + 2)^2$, $p_3(t) = (t + 3)^2$

b) $p_1(t) = \frac{1}{2}(t - 2)(t - 3)$, $p_2(t) = -(t - 1)(t - 3)$, $p_3(t) = \frac{1}{2}(t - 1)(t - 2)$.

Ange också koordinaterna för polynomet t^2 i basen $\{p_1, p_2, p_3\}$.

1.3 Visa att följande funktioner är linjärt beroende (för $t \in \mathbb{R}$):

a) $\sin(2t)$, $\cos(2t)$, $\sin^2(t)$, $\cos^2(t)$.

b) $\ln(t^6 + 1)$, $\ln(t^4 - t^2 + 1)$, $\ln(t^2 + 1)$.

1.4 Visa att följande funktioner är linjärt oberoende (för $t \in \mathbb{R}$):

a) $\sin(t)$, $\cos(t)$, $\sin(2t)$, $\cos(2t)$.

b) e^t , e^{t^2} , e^{t^3} .

1.5 Undersök om mängden $\{1 + t^3, 3 + t - 2t^2, -t + 3t^2 - t^3\}$ är linjärt beroende i $\mathcal{P}^{(3)}(\mathbb{R})$.

Kan elementen utgöra en bas för $\mathcal{P}^{(3)}(\mathbb{R})$?

1.6 De fyra första s.k. Hermite-polynomen är $\{1, 2t, -2 + 4t^2, -12t + 8t^3\}$. Visa att de är linjärt oberoende i $\mathcal{P}^{(3)}(\mathbb{R})$ och bestäm koordinaterna för $p(t) = 7 - 12t - 8t^2 + 12t^3$ i denna bas.

1.7 Vi definierar skalärprodukt och L_2 -norm för två funktioner f och g på ett intervall (a, b) enligt $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$ resp. $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. I analogi med vektorer i $\mathbb{R}^n$ definierar vi "vinkeln" θ mellan f och g genom

$$\langle f, g \rangle = \|f\| \cdot \|g\| \cos(\theta).$$

Vad är cosinus för "vinkeln" mellan funktionerna $f(x) = 3x + 1$ och $g(x) = 5x^2 + 3$ på intervallet $(-1, 1)$?

1.8 Visa att $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x \cos x} \, dx \leq 1$.

1.9 Visa att i $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$, med skalärprodukten

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx,$$

är funktionerna $\{1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots, \sin(nx), \cos(nx)\}$ sinsemellan ortogonala.

(Detta är fundamentalt i teorin för Fourierserier.)

1.10 För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ är funktionerna $1 + at^2$ och $4t - a$ ortogonala i $\mathcal{P}^{(2)}(0, 1)$?

1.11 Kan någon av följande två kandidater vara en skalärprodukt på $\mathcal{C}^1[a, b]$?

a) $\langle f, g \rangle = \int_a^b f'(x)g'(x) \, dx$

b) $\langle f, g \rangle = \int_a^b f'(x)g'(x) \, dx + f(a)g(a)$.

1.12 Låt $V = \mathcal{C}[0, 1]$, dvs det linjära rummet som består av reellvärda kontinuerliga funktioner på intervallet $[0, 1]$. För f och g i V definierar vi skalärprodukten av f och g som

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) \, dx,$$

och L_p -normen för $p = 1, 2, \infty$ som

$$\|f\|_{L_p(0,1)} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad p = 1, 2$$

och

$$\|f\|_{L_\infty(0,1)} = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Bestäm $\langle f, g \rangle$, $\|f\|_{L_p(0,1)}$ och $\|g\|_{L_p(0,1)}$ för $p = 1, 2, \infty$ i följande fall:

a) $f(x) = 1 + x$, $g(x) = 2 - x$

b) $f(x) = 1$, $g(x) = 3$

c) $f(x) = \frac{1}{2}$, $g(x) = 3 + 2x$

d) $f(x) = 3x$, $g(x) = -4x^2$

e) $f(x) = x$, $g(x) = e^x$

f) $f(x) = 1$, $g(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

2. INTERPOLATION

2.1 Bestäm den styckvis linjära interpolanten $\pi_h f(x)$ då intervallet I delas in i tre lika stora delintervall, då

a) $f(x) = 9x^2 - x^4$, och $I = [0, 3]$

b) $f(x) = \sin(x)$, och $I = [0, \frac{\pi}{2}]$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$, och $I = [1, \frac{5}{2}]$.

Använd också följande sats för att uppskatta felet i approximationen i L_1 - och L_∞ -norm:

Let $\pi_h v(x)$ be the piecewise linear interpolant of the (sufficiently regular) function $v(x)$, for $x \in (a, b)$, on the partition $\mathcal{T}_h$ of $[0, T]$. For $p = 1, 2, \infty$, one then has

$$\|\pi_h v - v\|_{L_p(a,b)} \leq C \|h^2 v''\|_{L_p(a,b)}.$$

3. FINITA DIFFERENS-METODER

- 3.1 Härled en finita differens-metod (dvs härled uttrycket för approximationen $\tilde{u}(t + \Delta t)$ som funktion av $\tilde{u}(t)$) för differentialekvationen

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = \frac{1}{u(t)}, & 0 < t < T \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

med

- a) Explicit Euler-metoden.
- b) Implicit Euler-metoden.
- c) Crank–Nicolson-metoden.

Implementera gärna metoderna i Matlab och jämför med den exakta lösningen

$$u(t) = \sqrt{u_0^2 + 2t}.$$

- 3.2 Visa genom att Taylor-utveckla propagatorn för ODE:n $\dot{u}(t) = \lambda u(t)$, $u(0) = u_0$ för respektive metod att

- a) Implicit Euler-metoden har trunkeringsfel av ordning $(\Delta t)^2$.
- b) Crank–Nicolson-metoden har trunkeringsfel av ordning $(\Delta t)^3$.

- 3.3 Visa att både implicit Euler-metoden och Crank–Nicolson-metoden är stabila för alla $\Delta t > 0$ för ODE:n $\dot{u}(t) = \lambda u(t)$ med $\lambda < 0$ och $u(0) = u_0$.

4. LAPLACE TRANSFORM (EXTRAUPPGIFTER)

Use Laplace transforms to solve the following initial-value problems:

4.1 $y'' - y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

4.2 $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4.$

4.3 $4y'' + y = -2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1/2.$

4.4 $y'' + 2y' + y = e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

4.5 $y'' + 2y' + 3y = 3t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Find the inverse Laplace transform of the following functions:

4.6 $\frac{1}{s(s+2)^2}.$

4.7 $\frac{1}{s^2+4s+29}.$

4.8 $\frac{2s}{(s^2+1)^2}.$

4.9 $\frac{3s^2}{(s^2+1)^2}.$

4.10 $\ln \frac{s+3}{s+2}.$

5. FOURIER SERIES (EXTRAUPPGIFTER)

The function f in the following exercises is assumed to be 2π -periodic, unless otherwise explicitly stated.

5.1 Find the Fourier series expansions of

a) $f(x) = |\sin(x)|$.

b) $f(x) = |\cos(x)|$.

5.2 Use the Fourier series expansion for $f(x) = x^2$, $(-\pi < x < \pi)$:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx),$$

to show that

a) $x^3 - \pi^2 x = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx)$, $-\pi < x < \pi$.

b) $x^4 - 4\pi^2 x^2 = 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \cos(nx) - \frac{7\pi^4}{15}$, $-\pi < x < \pi$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

5.3 We define the even and odd parts of a function $f(x)$ by

$$f_e(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \quad \text{and} \quad f_o(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

Show that $f_e(x)$ is an even function, and $f_o(x)$ is an odd function.

5.4 What are the even and odd parts of the following function?

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

5.5 The function $f(x) = 2x$, $0 \leq x \leq 1$ is periodic with period $P = 1$.

(a) Find the Fourier series expansion of $f(x)$.

(b) Use the result in (a) to compute the sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

5.6 Assume that the function $f(x) = x^2$, $0 < x < 2$ is 2-periodic. Find the Fourier series expansion of $f(x)$.

5.7 (a) Find the Fourier series expansion of the 2-periodic function f defined in $[-1, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2 \\ 0, & 1/2 < |x| \leq 1. \end{cases}$$

(b) What is the series sum in the discontinuity points?

5.8 Assume that the function $f(x) = x$, $0 < x < 2$, is 2-periodic.

(a) Find the complex Fourier series expansion of $f(x)$.

(b) Use (a) to give the real (cosinus-sinus form) Fourier series expansion of $f(x)$.

(c) Find all solutions to the differential equation

$$y''(x) - y(x) = f(x).$$

5.9 The function $f(x) = |x|^3$, for $|x| \leq 2$, is 4-periodic. Find the Fourier series expansion for both f and f' .

5.10 The data function $f(x) = x(2 - x)$, for $0 \leq x < 2$, is 2-periodic. Find a 2-periodic solution to the differential equation

$$y''(x) + y'(x) + 2y(x) = f(x),$$

as a complex Fourier series.

6. SEPARATION OF VARIABLES (EXTRAUPPGIFTER)

6.1 Solve the boundary value problem (Laplace's equation)

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 2, & 0 < y < \infty, \\ u(0, y) = u_x(2, y) = 0, & \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < 1, & u(x, 0) = 1, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

6.2 Solve the boundary value problem (Laplace's equation)

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b, \\ u(0, y) = u_x(a, y) = 0, \\ u(x, 0) = 0, & u(x, b) = x^2 - 2ax. \end{cases}$$

6.3 Solve the inhomogeneous boundary value problem

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = y, & x > 0, & 0 < y < 1 \\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \\ u(0, y) = y - y^3, & u \text{ is bounded as } x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

6.4 Solve the initial-boundary value problem (heat equation)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, & t > 0 \\ u(0, t) = 1, & u(\pi, t) = -1, \\ u(x, 0) = \cos(x). \end{cases}$$

6.5 Solve the following initial-boundary value problem (wave equation)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < \ell, & t > 0, & c > 0 \\ u_x(0, t) = 0, & u_x(\ell, t) = 0, \\ u(x, 0) = 1, & u_t(x, 0) = -\cos(\frac{\pi}{\ell}x). \end{cases}$$

6.6 Solve the inhomogeneous initial-boundary value problem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \ell, & t > 0, & c > 0 \\ u(0, t) = 0, & u(\ell, t) = 1, \\ u(x, 0) = 2\frac{x}{\ell} - 1. \end{cases}$$

6.7 Solve the inhomogeneous problem

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1, & t > 0, \\ u(0, t) = 1, & u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

6.8 Solve the initial-boundary value problem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right), & 0 < x < \ell, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u(0, t) = u(\ell, t) = 0. \end{cases}$$

6.9 Let $u(x, t)$ be the solution to the following problem

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad c > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

Show that for $t > 0$,

$$\int_0^\pi |u_t(x, t)|^2 dx \leq \int_0^\pi |g(x)|^2 dx.$$

6.10 Solve the differential equation

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - \pi^2 u, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad c > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = \cos(\pi x), \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

6.11 A substance is diffusing in a straight cylindrical pipe of length ℓ with closed intersections. Suppose that the symmetry axis of the cylinder is aligned with the x -axis. If the density of substance at the point x at time t is denoted by $\rho(x, t)$, then $\rho(x, t)$ satisfies the diffusion equation

$$\rho_t = C \rho_{xx},$$

where C is a constant. Determine $\rho(x, t)$ if $\rho(x, 0)$ varies linearly from 0 to ρ_0 as x goes from 0 to ℓ .

6.12 Solve the following inhomogeneous initial-boundary value problem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t} \sin(3x), & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 1, \quad u(x, 0) = 2. \end{cases}$$

6.13 Compute the stationary temperature $u(x, y)$ in the square plate

$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 100, \quad 0 \leq y \leq 100\},$$

if the side $y = 100$ is kept at temperature $100^\circ C$ and all other sides at the temperature $0^\circ C$. Determine, in particular, the stationary temperature at the midpoint of the plate.

Hint: The stationary heat equation satisfies Laplace's equation.

6.14 a) Determine the function $u(x, t)$ satisfying:

$$\begin{cases} 4u_{xx} = u_{tt}, & 0 < x < 2, & t > 0 \\ u(x, 0) = (1 - x)\theta(1 - x) & u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < 2 \\ u(0, t) = u(2, t) = 0, & & t > 0. \end{cases}$$

b) Determine $u(x, \frac{1}{2})$.

6.15 Solve the problem

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 1, & 0 < x < 1, & 0 < y < 1 \\ u(x, 0) = 0, & u_y(x, 0) = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0, y) = 0, & u(1, y) = y^2 - 2y. \end{cases}$$

7. CONVOLUTION

7.1 Compute $(f * g)(t)$ when

a) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ and $g(t) = t\theta(t)$.

b) $f(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\theta(t)$ and $g(t) = e^t\theta(t)$.

7.2 Use the convolution theorem to compute the inverse Laplace transform of

a) $F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$ *Hint:* $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$.

b) $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 9)}$.

SVAR

1. LINJÄRA RUM

- 1.1 a) och c)
- 1.2 a) Koordinater för t^2 är $(3, -3, 1)$.
b) Koordinater för t^2 är $(1, 4, 9)$.
- 1.3 *Ledning:* a) Använd trigonometriska formler; b) faktorisera $t^6 + 1$.
- 1.4 *Ledning:* Sätt linjärkombinationen $= 0$ (för alla t). Gör intelligenta val av t som ger ett ekvationssystem för koefficienterna med endast noll-lösning.
- 1.5 De är linjärt oberoende men kan ej utgöra en bas, ty dimensionen av $\mathcal{P}_3$ är 4 (och det räcker alltså inte med 3 basvektorer för att spänna rummet).
- 1.6 Koordinaterna är $(3, 3, -2, 3/2)$.
- 1.7 $\cos(\theta) = \frac{7}{6\sqrt{6}}$
- 1.8 *Ledning:* Använd Cauchy–Schwarz olikhet.
- 1.9 *Ledning:* Använd trigonometriska formler, alt. partialintegrera två gånger.
- 1.10 $a = \pm\sqrt{6}$
- 1.11 b) men ej a).
- 1.12

	$\ f\ _{L_1}$	$\ f\ _{L_2}$	$\ f\ _{L_\infty}$	$\ g\ _{L_1}$	$\ g\ _{L_2}$	$\ g\ _{L_\infty}$	$\langle f, g \rangle$
a)	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{7}{3}}$	2	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{7}{3}}$	2	$\frac{13}{6}$
b)	1	1	1	3	3	3	3
c)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{7}{\sqrt{3}}$	5	2
d)	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{3}$	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{\sqrt{5}}$	4	-3
e)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$e - 1$	$\sqrt{\frac{1}{2}(e^2 - 1)}$	e	1
f)	1	1	1	$1 + \sin(1) - \cos(1)$	$\sqrt{\frac{1}{2}(3 - \cos(2))}$	$\sqrt{2}$	$1 + \sin(1) - \cos(1)$

2. INTERPOLATION

2.1 a)

$$\pi_h f(x) = \begin{cases} 8x, & x \in [0, 1) \\ 12x - 4, & x \in [1, 2) \\ 60 - 20x, & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Feluppskattningar: $\|\pi_h f - f\|_{L_1(0,3)} \leq (54 + 12\sqrt{6})c$; $\|\pi_h f - f\|_{L_\infty(0,3)} \leq 90c$ för någon interpolationskonstant c .

b)

$$\pi_h f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi}x, & x \in [0, \frac{\pi}{6}) \\ \frac{3}{\pi}(\sqrt{3} - 1)x + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, & x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}) \\ \frac{3}{\pi}(2 - \sqrt{3})x + \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2, & x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Feluppskattningar: $\|\pi_h f - f\|_{L_1(0, \frac{\pi}{2})} \leq \frac{\pi^2}{36}c$; $\|\pi_h f - f\|_{L_\infty(0, \frac{\pi}{2})} \leq \frac{\pi^2}{36}c$ för någon interpolationskonstant c .

c)

$$\pi_h f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(5 - 2x), & x \in [1, \frac{3}{2}) \\ \frac{1}{6}(7 - 2x), & x \in [\frac{3}{2}, 2) \\ \frac{1}{10}(9 - 2x), & x \in [2, \frac{5}{2}]. \end{cases}$$

Feluppskattningar: $\|\pi_h f - f\|_{L_1(0, \frac{5}{2})} \leq \frac{21}{100}c$; $\|\pi_h f - f\|_{L_\infty(0, \frac{5}{2})} \leq \frac{1}{2}c$ för någon interpolationskonstant c .

3. FINITA DIFFERENS-METODER

3.1 a) $\tilde{u}(t + \Delta t) = \tilde{u}(t) + \Delta t / \tilde{u}(t).$

b) $\tilde{u}(t + \Delta t) = \frac{\tilde{u}(t)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\tilde{u}}{2}\right)^2 + \Delta t}.$

c) $\tilde{u}(t + \Delta t) = \frac{1}{2} \left(\tilde{u}(t) + \frac{\Delta t}{2\tilde{u}(t)} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\tilde{u}(t) + \frac{\Delta t}{2\tilde{u}(t)} \right)^2 + \frac{\Delta t}{2}}.$

3.2 b) *Lösning:* Den exakta lösningen på intervallet $[0, \Delta t]$ är $u(\Delta t) = u_0 \exp(\lambda \Delta t)$, så propagatorn för den exakta lösningen är $P_0(\Delta t) = \exp(\lambda \Delta t)$.

Propagatorn för Crank–Nicolson-metoden för den givna differentialekvationen är $P_{CN}(\Delta t) = \frac{1 + \frac{1}{2}\lambda\Delta t}{1 - \frac{1}{2}\lambda\Delta t}.$

Taylor-utveckling av P_0 (med variabeln $\lambda\Delta t$) ger

$$(1) \quad \exp(\lambda\Delta t) = 1 + \lambda\Delta t + \frac{1}{2}(\lambda\Delta t)^2 + \frac{1}{6}(\lambda\Delta t)^3 + \dots$$

medan Taylor utveckling av nämnaren i P_{CN} ger

$$(2) \quad \frac{1 + \frac{1}{2}\lambda\Delta t}{1 - \frac{1}{2}\lambda\Delta t} = \left(1 + \frac{1}{2}\lambda\Delta t\right) \left(1 + \frac{1}{2}\lambda\Delta t + \left(\frac{1}{2}\lambda\Delta t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda\Delta t\right)^3 + \dots\right)$$

$$= 1 + \lambda\Delta t + \frac{1}{2}(\lambda\Delta t)^2 + \frac{1}{4}(\lambda\Delta t)^3 + \dots$$

Om vi jämför (2) med (1) ser vi att utvecklingarna är lika till och med ordning $(\Delta t)^2$, vilket innebär att skillnaden, dvs trunkeringsfelet, är av ordning $(\Delta t)^3$.

3.3 *Ledning:* Visa att $|P(\Delta t)| < 1$ för alla $\Delta t > 0$, där $P(\Delta t)$ är propagatorn för respektive metod. Kom ihåg att $\lambda < 0$.

4. LAPLACE-TRANSFORMER

4.1 $y(t) = e^t - 1.$

4.2 $y(t) = e^{2t} + 2e^t.$

4.3 $y(t) = -2 + 2 \cos(t/2) + \sin(t/2).$

4.4 $y(t) = \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t}.$

4.5 $y(t) = \frac{2}{3}e^{-t} \cos \sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t} \sin \sqrt{2}t + t - \frac{2}{3}.$

4.6 $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t}.$

4.7 $\frac{1}{5}e^{-2t} \sin(5t).$

4.8 $t \sin(t).$

4.9 $\frac{3}{2} \sin(t) + \frac{3}{2}t \cos(t).$

4.10 $\frac{1}{t}(e^{-2t} - e^{-3t}).$

5. FOURIER SERIES

$$5.1 \text{ a) } |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}.$$

$$\text{b) } |\cos x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2nx)}{4n^2 - 1}.$$

5.2 -

5.3 -

5.4

$$f_e(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} x^2 + e^x, & x < 0 \\ x^2 + e^{-x}, & x > 0. \end{cases} \quad f_o(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} x^2 - e^x, & x < 0 \\ e^{-x} - x^2, & x > 0. \end{cases}$$

$$5.5 \text{ a) } f(x) \sim 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2n\pi x).$$

$$\text{b) } \pi^2/6.$$

$$5.6 \text{ } f(x) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\pi x) - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi x).$$

$$5.7 \text{ a) } f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos((2n-1)\pi x).$$

$$\text{b) } 1/2.$$

$$5.8 \text{ a) } f(x) = 1 - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{in\pi} e^{in\pi}.$$

$$\text{b) } f(x) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi x).$$

$$\text{c) } y(x) = y_h(x) + y_p(x), \quad y_h(x) = Ae^x + Be^{-x},$$

$$y_p(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{in\pi x}, \quad y_0 = -1, \quad (1 + n^2\pi^2)y_n = \frac{1}{in\pi}, \quad n \neq 0$$

5.9

$$f(x) = 2 + \frac{48}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n(n^2\pi^2 - 2)}{n^4} \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right).$$

$$f'(x) = -\frac{24}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n(n^2\pi^2 - 2)}{n^3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right).$$

5.10

$$y(x) = \frac{1}{3} + 2 \sum_{n \neq 0} \frac{e^{in\pi x}}{n^2 \pi^2 (n^2 \pi^2 - in\pi - 2)}.$$

6. SEPARATION OF VARIABLES

$$6.1 \quad u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\alpha_n)}{\alpha_n} e^{-\alpha_n y} \sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = (n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{2}.$$

$$6.2 \quad u(x, y) = \frac{-4a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^3} \sin(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi x}{a} \cdot \frac{\sinh(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi y}{a}}{\sinh(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi b}{a}}.$$

$$6.3 \quad u(x, y) = \frac{1}{6}(y^3 - y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7(-1)^n}{2(n\pi)^3} e^{-n\pi x} \sin(n\pi y).$$

$$6.4 \quad u(x, t) = 1 - \frac{2x}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{k+1} - 1 \right) \frac{2}{k(k^2 - 1)\pi} e^{-k^2 t} \sin(kx).$$

$$6.5 \quad u(x, t) = 1 - \frac{\ell}{\pi c} \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{\pi c t}{\ell}\right).$$

$$6.6 \quad u(x, t) = \frac{x}{\ell} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right).$$

$$6.7 \quad u(x, t) = 1 - x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(n\pi t) \sin(n\pi x).$$

$$6.8 \quad u(x, t) = \left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 \left(e^{-\frac{4\pi^2 t}{\ell^2}} - 1\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right).$$

6.9 -

$$6.10 \quad u(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2 - 1} \sin(2k\pi x) \cos\left(\sqrt{4k^2 + 1}\pi t\right).$$

$$6.11 \quad \rho(x, t) = \frac{\rho_0}{2} - \frac{4\rho_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} e^{-\frac{C(2n-1)^2 \pi^2 t}{\ell^2}} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right).$$

$$6.12 \quad u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - (-1)^n}{n} e^{-n^2 t} \sin(nx) + \frac{x}{\pi} + \frac{1}{8} \left(e^{-t} - e^{-9t} \right) \sin(3x).$$

6.13

$$u(x, y) = \frac{400}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1) \sinh((2k-1)\pi)} \sinh\left(\frac{(2k-1)\pi y}{100}\right) \sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{100}\right),$$

$$u(50, 50) = \frac{200}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1) \cosh\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right)} \approx 25^\circ C.$$

$$6.14 \text{ a) } u(x, t) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{n\pi}{2} - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \cos(n\pi t) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

$$\text{b) } u\left(x, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(k\pi x).$$

$$6.15 \text{ } u(x, y) = \frac{1}{2}(y^2 - y) + \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh\left((n + \frac{1}{2})\pi(1 - x)\right) - \sinh\left((n + \frac{1}{2})\pi x\right)}{(n + \frac{1}{2})^3 \sinh\left((n + \frac{1}{2})\pi\right)} \sin\left((n + \frac{1}{2})\pi y\right).$$

7. CONVOLUTION

$$7.1 \text{ a) } (f * g)(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t^2/2, & 0 \leq t < 1 \\ t - 1/2, & t \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{b) } (f * g)(t) = \frac{1}{6}(e^t - 3e^{-t} + 2e^{-2t})\theta(t)$$

$$7.2 \text{ a) } \frac{1}{3} \sin(t) - \frac{1}{6} \sin(2t), \quad \text{b) } \frac{1}{9}t - \frac{1}{27} \sin(3t).$$