Övning 2

Max Blom

November 11, 2020

4.3

Beräkna Galerkin-approximationen i $\mathcal{P}^q(0,1)$ för $q = 1, 2, 3, 4$ för ODE:n

$$\dot{u}(t) = u(t), \quad 0 < t < 1, \quad u(0) = 1.$$

4.3

Galerkin-approximation går ut på att hitta ett $U(t) \in \mathcal{P}^q(0,1)$ som uppfyller

$$\int_0^1 R(U(t))v(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\dot{U}(t) - U(t)\right) v(t)\mathrm{d}t = 0$$

för alla testfunktioner $v(t) \in \mathcal{P}_0^q(0,1)$.

4.3

Galerkin-approximation går ut på att hitta ett $U(t) \in \mathcal{P}^q(0,1)$ som uppfyller

$$\int_0^1 R(U(t))v(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\dot{U}(t) - U(t)\right) v(t)\mathrm{d}t = 0$$

för alla testfunktioner $v(t) \in \mathcal{P}_0^q(0,1)$. Eftersom att $U(t)$ kommer vara ett polynom kan vi skriva det som

$$U(t) = u_0 + \sum_{j=1}^{q} \xi_j t^j$$

och då blir $\dot{U}(t) = \sum_{j=1}^{q} j\xi_j t^{j-1}$.

4.3

Då $v(t)$ är ett polynom med konstantterm noll kan vi anta att $v_i(t) = t^i$.

4.3

Då $v(t)$ är ett polynom med konstantterm noll kan vi anta att $v_i(t) = t^i$. Sätter vi in allt får vi

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{q} j\xi_j t^{j-1} - u_0 - \sum_{j=1}^{q} \xi_j t^j \right) t^i \mathrm{d}t = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, q.$$

4.3

Då $v(t)$ är ett polynom med konstantterm noll kan vi anta att $v_i(t) = t^i$. Sätter vi in allt får vi

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{q} j\xi_j t^{j-1} - u_0 - \sum_{j=1}^{q} \xi_j t^j \right) t^i \mathrm{d}t = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, q.$$

Nu har vi allt vi behöver för att lösa problemet. Vi kommer få ett ekvationssystem.

4.3

Vi skriver om till som

$$A_{i,j} = \int_0^1 \left(j t^{j-1+i} - t^{j+i} \right) \mathrm{d}x = \left(\frac{j}{i+j} - \frac{1}{i+j+1} \right)$$

4.3

Vi skriver om till som

$$A_{i,j} = \int_0^1 \left(j t^{j-1+i} - t^{j+i} \right) \mathrm{d}x = \left(\frac{j}{i+j} - \frac{1}{i+j+1} \right)$$

och

$$b_i = u_0 \int_0^1 t^i \mathrm{d}x = u_0 \frac{1}{i+1}$$

så får vi $A\xi = b$.

4.3

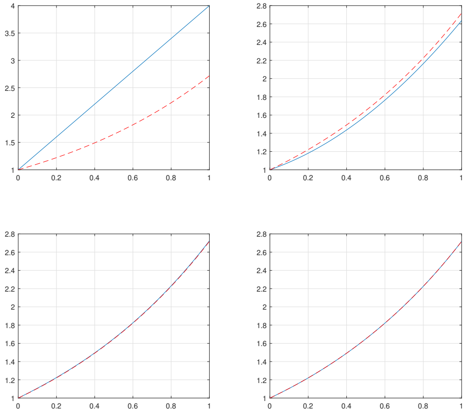
Lösningen blir då $\xi = A^{-1}b$.

4.3

Lösningen blir då $\xi = A^{-1}b$. Tyvärr är matrisen illa betingad, så determinanten är ofta nära noll. Då är det bara att sätta in i

$$U(t) = u_0 + \sum_{j=1}^{q} \xi_j t^j$$

4.3



4.5

Uppgift: Hitta en lösning $U(x)$ till differentialekvationen

$$-u''(x) = 1, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

med ansatsen $U(x) = A\sin(\pi x) + B\sin(2\pi x)$.

4.5

Uppgift: Hitta en lösning $U(x)$ till differentialekvationen

$$-u''(x) = 1, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

med ansatsen $U(x) = A\sin(\pi x) + B\sin(2\pi x)$.

1. Beräkna analytiska lösningen $u(x)$

4.5

Uppgift: Hitta en lösning $U(x)$ till differentialekvationen

$$-u''(x) = 1, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

med ansatsen $U(x) = A\sin(\pi x) + B\sin(2\pi x)$.

1. Beräkna analytiska lösningen $u(x)$
2. Beräkna residualen $R(x)$

4.5

Uppgift: Hitta en lösning $U(x)$ till differentialekvationen

$$-u''(x) = 1, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

med ansatsen $U(x) = A\sin(\pi x) + B\sin(2\pi x)$.

1. Beräkna analytiska lösningen $u(x)$
2. Beräkna residualen $R(x)$
3. Använd ortogonalitetsargumentet $\int_0^1 R(x)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x = 0$ för att hitta A och B

4.5

Uppgift: Hitta en lösning $U(x)$ till differentialekvationen

$$-u''(x) = 1, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

med ansatsen $U(x) = A\sin(\pi x) + B\sin(2\pi x)$.

1. Beräkna analytiska lösningen $u(x)$
2. Beräkna residualen $R(x)$
3. Använd ortogonalitetsargumentet $\int_0^1 R(x)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x = 0$ för att hitta A och B
4. Plotta $e(x) = |u(x) - U(x)|$

4.5

Den analytiska lösningen ges av att integrera -1 två gånger, så vi får

$$u(x) = -\frac{x^2}{2} + ax + b.$$

4.5

Den analytiska lösningen ges av att integrera -1 två gånger, så vi får

$$u(x) = -\frac{x^2}{2} + ax + b.$$

$u(0) = 0$ ger $b = 0$, och $u(1) = 0$ ger $a = \frac{1}{2}$.

4.5

Den analytiska lösningen ges av att integrera -1 två gånger, så vi får

$$u(x) = -\frac{x^2}{2} + ax + b.$$

$u(0) = 0$ ger $b = 0$, och $u(1) = 0$ ger $a = \frac{1}{2}$. Då får vi

$$u(x) = \frac{1}{2}\left(x - x^2\right)$$

4.5

Residualen är helt enkelt att vi flyttar över alla termer av differentialekvationen på en sida och sätter in vår approximation.

4.5

Residualen är helt enkelt att vi flyttar över alla termer av differentialekvationen på en sida och sätter in vår approximation. Det blir då

$$R(x) = -U''(x) - 1$$

som vi ser är lika med noll om vi har den analytiska lösningen.

4.5

Residualen är helt enkelt att vi flyttar över alla termer av differentialekvationen på en sida och sätter in vår approximation. Det blir då

$$R(x) = -U''(x) - 1$$

som vi ser är lika med noll om vi har den analytiska lösningen. Sätter vi in ansatsen får vi

$$R(x) = A\pi^2 \sin(\pi x) + 4B\pi^2 \sin(2\pi x) - 1.$$

4.5

Vi har

$$\int_0^1 R(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{A\pi^2}{2} - \frac{2}{\pi} = 0$$

4.5

Vi har

$$\int_0^1 R(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{A\pi^2}{2} - \frac{2}{\pi} = 0$$

och

$$\int_0^1 R(x)\sin(2\pi x)\mathrm{d}x = 2B\pi^2 = 0$$

4.5

Vi har

$$\int_0^1 R(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{A\pi^2}{2} - \frac{2}{\pi} = 0$$

och

$$\int_0^1 R(x)\sin(2\pi x)\mathrm{d}x = 2B\pi^2 = 0$$

som ger $A = \frac{4}{\pi^3}$ och $B = 0$.

4.5

Hur kan vi lösa integralen snabbt?

4.5

Hur kan vi lösa integralen snabbt? Vi har att för $n, m \in \mathbb{N}$ gäller

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{1}{2}, & n = m \end{cases} .$$

Alltså, basen är ortogonal.

4.5

Nu när vi har detta kan vi rita ut felet $e(x) = |u(x) - U(x)|$.

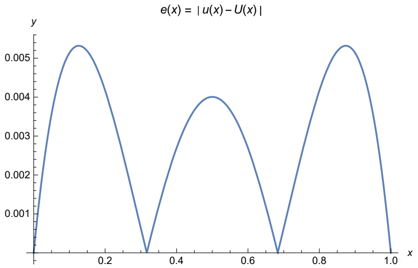


Figure: Felet av den approximativa lösningen.