Övning 2

Max Blom

November 14, 2020

4.4

Uppgift: Beräkna styvhetsmatrisen S och lastvektorn b för

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0 \tag{1}$$

där $f(x) = x$ och $h = 1/4$.

4.4

Vi börjar med att skriva om det på svag form. Multiplicera med en testfunktion $v \in H_0^2(0,1)$ som

$$-u''(x)v(x) = f(x)v(x). \tag{2}$$

Integrera nu över intervallet $(0,1)$

$$\int_0^1 -u''(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

4.4

Vi kan använda partiell integration på första integralen så får vi

$$\int_0^1 u''(x)v(x)\mathrm{d}x = \left[u'(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

Då får vi kvar

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

4.4

Vi approximerar lösningen med hattfunktioner $\phi_i(x) \in V_0^h(0,1)$. Hur ser de ut?

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h}, & x \in (x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_i-x}{h}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & \text{annars} \end{cases} \tag{4}$$

Då x_i:na är jämnt blir derivatan

$$\phi_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x \in (x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{1}{h}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & \text{annars} \end{cases} \tag{5}$$

4.4

Vi ansätter lösningen $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \phi_i(x)$. Tag $v_i(x) = \phi_i(x)$. Då får vi

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j \int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)\mathrm{d}x. \tag{6}$$

Vi kan se detta som ett linjärt ekvationssystem $S\xi = b$ där

$$S_{i,j} = \int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i'(x)\mathrm{d}x \tag{7}$$

och

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)\mathrm{d}x. \tag{8}$$

4.4

Vad blir $S_{i,j}$? Vi har att om $i = j$ så blir integranden $1/h^2$ över ett intervall som är $2h$ långt. Om $i = j \pm 1$ är integranden $-1/h^2$ på ett intervall som är h långt. Därmed får vi att

$$S_{i,j} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

För b får vi integrera över alla hattfunktioner.

4.4

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\phi_i(x)\mathrm{d}x =$$

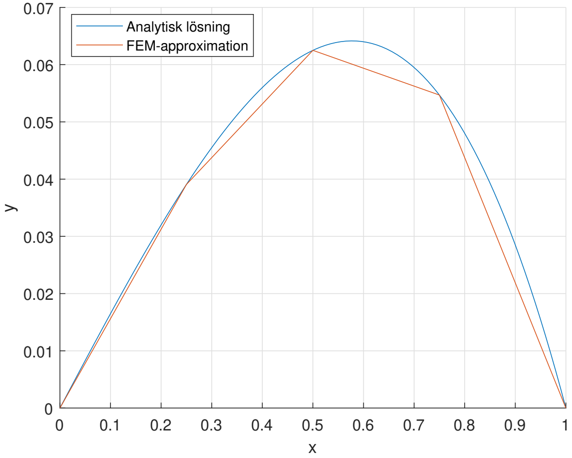
$$= \int_0^{\frac{1}{4}} (x + (i-1)h)\,\frac{x}{h}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (x + (i-1)h)\,\frac{\frac{1}{2} - x}{h}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{i}{16}$$

4.4

Nu kan vi lösa $S\xi = b$ och få ut vår FEM-approximation. På nästa sida kan vi se hur det ser ut om vi löser det i MATLAB.

4.4



Analytisk lösning
FEM-approximation
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
y
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x

2.1

Hitta den styckvis linjära interpolanten $\pi_h f(x)$ då intervallet delas in i tre lika stora delar.

1. $f(x) = 9x^2 - x^4$, och $I = [0, 3]$
2. $f(x) = \sin(x)$, och $I = [0, \frac{\pi}{2}]$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$, och $I = [1, \frac{5}{2}]$.

Uppskatta också felet i L_1- och L_∞-norm enligt

$$\|\pi_h v - v\|_{L_p(a,b)} \leq C \left\| h^2 v'' \right\|_{L_p(a,b)} .$$

2.1

Vi löser uppgiften genom att hitta linjerna som går mellan punkterna $(x_i, f(x_i))$, för $i = 1, 2, 3, 4$. Sätt $y_i = f(x_i)$.

Det går att göra med $y = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

2.1

För $f(x) = 9x^2 - x^4$, och $I = [0, 3]$ får vi
$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$ och därmed blir interpolanten

$$\pi_h f(x) = \begin{cases} 8x, & x \in [0, 1] \\ 12x - 4, & x \in (1, 2] \\ 60 - 20x, & x \in (2, 3] \end{cases}$$

2.1

För $f(x) = \sin(x)$, och $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ får vi
$x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{6}, x_3 = \frac{\pi}{3}, x_4 = \frac{\pi}{2}$ och därmed blir interpolanten

$$\pi_h f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi}x, & x \in [0, \frac{\pi}{6}] \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}-3}{\pi}x, & x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}] \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2 + \frac{6-3\sqrt{3}}{\pi}x, & x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

2.1

För $f(x) = \frac{1}{x}$, och $I = [1, \frac{5}{2}]$ får vi $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = 2, x_4 = \frac{5}{2}$ och därmed blir interpolanten

$$\pi_h f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(5 - 2y\right), & x \in [1, \frac{3}{2}] \\ \frac{1}{6}\left(7 - 2y\right), & x \in (\frac{3}{2}, 2] \\ \frac{1}{10}\left(9 - 2y\right), & x \in (2, \frac{5}{2}] \end{cases}$$

2.1

Vi kan uppskatta felen med hjälp av satsen, kan vi räkna ut normerna

$$\left\| h^2 f'' \right\|_{L_1(a,b)} = h \sqrt{\int_a^b (f''(x))^2 \, \mathrm{d}x}$$

och

$$\left\| h^2 f'' \right\|_{L_\infty(a,b)} = h^2 \max_{x \in (a,b)} \left(f''(x) \right) .$$