Övning 4

Max Blom

November 17, 2020

5.15

Uppgift: Visa att

$$\int_{x_0}^{x_1} f'\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)\left(x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right) \mathrm{d}x = 0.$$

5.15

Det är en linjär funktion, så vi integrerar bara

$$f'\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)\int_{x_0}^{x_1}\left(x-\frac{x_0+x_1}{2}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= f'\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x_0+x_1}{2}x\right]_{x_0}^{x_1} =$$

$$= f'\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)\left(\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_0^2}{2}-\frac{x_0x_1+x_1^2}{2}+\frac{x_0^2+x_0x_1}{2}\right) = 0$$

5.16

Uppgift: Visa att

$$\left| \int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x - f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)(x_1 - x_0) \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2} \max_{x \in [x_0, x_1]} \left| f''(x) \right| \int_{x_0}^{x_1} \left(x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right)^2 \mathrm{d}x$$

5.16

Vi Taylorutvecklar $f(x)$ runt $\frac{x_0+x_1}{2}$ till andra ordningen. Då får vi

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} f(\frac{x_0+x_1}{2}) + f'(\frac{x_0+x_1}{2})\left(x - \frac{x_0+x_1}{2}\right) +$$
$$+ \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - \frac{x_0+x_1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} f(\frac{x_0+x_1}{2}) +$$
$$+ \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - \frac{x_0+x_1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$$

där $\xi \in [x_0, x_1]$.

5.16

Integrerar vi första termen i integranden får vi $f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)(x_1-x_0)$, vilket ger att

$$\left|\int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x - f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)(x_1-x_0)\right| =$$

$$\left|\int_{x_0}^{x_1} \frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{x_0+x_1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x\right| = \left|\frac{f''(\xi)}{2}\right| \int_{x_0}^{x_1} \left(x-\frac{x_0+x_1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$\leq \frac{1}{2} \max_{x\in[x_0,x_1]} \left|f''(x)\right| \int_{x_0}^{x_1} \left(x-\frac{x_0+x_1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$$

7.7

Uppgift: Lös randvärdesproblemet

$$-u''(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u'(0) = 5, u(1) = 0.$$

Låt $\mathcal{T}_h \ : \ x_j = \frac{j}{N}, \ j = 0, 1, \ldots, N, \ h = 1/N$ vara den likformiga partitionen av $[0, 1]$ i N delintervall. Formulera FEM-metoden för V_h med $N = 3$. Räkna också ut FEM-approximationen $U \in V_h$ för $N = 3$.

7.7

För att få FEM-formuleringen skriver vi på svag form och integrerar över intervallet. Sedan ansätter vi att lösningen ligger i V_h.

1. Multiplicera med en testfunktion $v(x) \in V_h$
2. Integrera över intervallet $(0, 1)$
3. Ansätt $U(x)$ till en summa av hattfunktioner
4. Sätt $v_i(x)$ till hattfunktioner
5. Få ut på matrisform

7.7

Vi får

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)\mathrm{d}x = -\left[u'(x)v(x)\right]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x = 0$$

som är samma som

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x = -5v(0).$$

7.7

FEM-problemet blir alltså att hitta $u(x) \in V_h$ så att

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x = -5v(0)$$

för alla $v(x) \in V_h$. Antag att vi har partitionen $\mathcal{T}_{1/3}$. Ansätt $U(x) = \sum_{j=1}^{3} \xi_j \varphi_j(x)$.

7.7

Vi tar $v_i(x) = \varphi_i(x),\ i = 1, 2, 3$ och stoppar in variationsformuleringen tillsammans med $U(x)$. Då får vi

$$\sum_{j=1}^{2} \xi_j \int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\mathrm{d}x = -5\varphi_i(0)$$

som ger ett ekvationssystem $S\xi = b$.

7.7

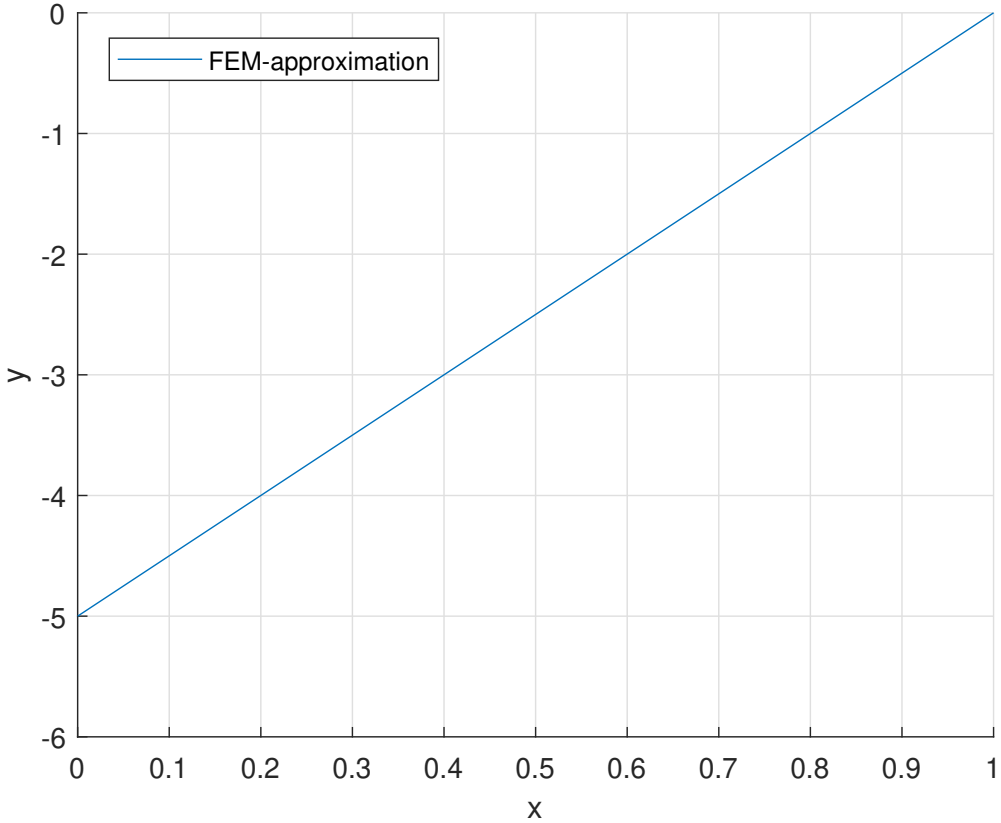
Vi får att

$$S = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

och

$$b = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och lösningen ges av $\xi = S^{-1}b$.

7.7

Vi får lösningen