

Övning 4

Max Blom

November 18, 2020

7.8

Uppgift: Försök lösa

$$-u''(x) = 1, \quad 0 < x < 1, \quad u'(0) = u'(1) = 0$$

först analytiskt och sedan med FEM. För FEM har vi givet partitionen $\mathcal{T}_{1/2}$, alltså har vi delat upp $[0, 1]$ i två delintervall med tre noder.

7.8

Den analytiska lösningen ges av att integrera två gånger och lösa ut konstanterna. Då får vi

$$u(x) = -\frac{x^2}{2} + ax + b \quad (1)$$

men randvillkoren vill ger både $a = 0$ och $a = 1$. Alltså finns inte en analytisk lösning. Vad händer då med FEM-lösningen?

7.8

FEM-formuleringen blir att hitta $u(x) \in V_h$ som löser

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 v(x)dx$$

för alla $v(x) \in V_h$. Vi ansätter en lösning med hattfunktioner,
 $U(x) = \sum_{j=1}^3 \xi_j \phi_j(x)$.

7.8

Sätter vi in allt och väljer $v_i(x) = \phi_i(x)$ får vi

$$\sum_{j=1}^2 \xi_j \int_0^1 \phi_j'(x) \phi_i'(x) dx = \int_0^1 v_i(x) dx$$

som kan skrivas på matrisform.

7.8

Vi får

$$S = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

och

$$b = \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \\ h \\ \frac{h}{2} \end{bmatrix}$$

för $h = 1/2$. Lösningen ges av $\xi = S^{-1}b$.

7.8

Det går ej att lösa! Vi har att $\det(S) = 0$. Försöker vi Gauss-eliminera får vi en nollrad, så det finns inga lösningar alls.

7.11

Uppgift: Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$-u''(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta.$$

Vi vill lösa problemet med FEM. Partitionera $[0, 1]$ i 3 delintervall, alltså $h = 1/3$. Verifiera att ansatsen

$$U(x) = \alpha\phi_0(x) + \sum_{j=1}^3 \xi_j\phi_j(x) \text{ ger}$$

$$\frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}.$$

7.11

Vi ska också visa att vi kan reducera matrisekvationen till en 3×3 -matris gånger en 3×1 vektor. Sedan ska vi lösa problemet för $\alpha = 2$ och $\beta = 3$.

Vi börjar med att ta fram variationsformuleringen och stoppa in ansatsen.

7.11

Vi multiplicerar med $v(x) \in V_h$ och integrerar och får

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \beta v(1).$$

Vad händer med $u'(0)$? Då vi har hattfunktioner blir derivatan diskontinuerlig i $x = 0$, så vi sätter $v(0) = 0$ för att lösa det.

7.11

Insättning av ansatsen samt att vi tar $v_i(x) = \phi_i(x)$ ger

$$\alpha \int_0^1 \phi_0'(x) \phi_0'(x) dx + \sum_{j=1}^3 \xi_j \int_0^1 \phi_j'(x) \phi_0'(x) dx = \beta v_0(1).$$

Vi tolkar detta på matrisform och får

$$\frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}.$$

7.11

Då den första kolumnen inte motsvarar en variabel så kan vi bara flytta över konstanterna till andra sidan och ta bort α ur vektorn. Då får vi

$$\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{h} \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Sätter vi $\alpha = 2$ och $\beta = 3$ kan vi få fram en lösning.

7.11

