Exercise 7.11

Formulering av FEM-ekvationer

Systemet som vi ska formulera en FEM-lösing till i denna uppgift är:

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \\ u(0) &= \alpha \\ u'(1) &= \beta \end{aligned} \tag{1}$$

Notera att i uppgiften är $f(x) = 0$, och vi har också givet att steglängnden $h = 1/3$. Dock för att ge insikt i hur ett FEM-system ställs upp generellt kommer formulerandet av FEM-ekvationerna här betrakta det generalla fallet med en godtycklig funktion $f(x)$, och steglängd $h = 1/N$.

Det första steget i en FEM-lösning är att formulera variationsformuleringen. När man har ett icke-homogent Dirichlet-villkor ($u(0) = \alpha$ i Eq. 1) behöver man definiera **två rum**:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{w : w', w \in \mathcal{L}_2(0,1), w(0) = \alpha\} \quad \text{(trial-rum)} \\ \mathcal{V}^0 &= \{w : w', w \in \mathcal{L}_2(0,1), w(0) = 0\} \quad \text{(test-rum)} \end{aligned} \tag{2}$$

D.v.s, har man ett icke homogent Dirichlet-villkor behöver man definera båda ett trial-rum och ett test-rum for att se till att om u löser variationsformuleringen så löser u också Eq. 1 (givet u har en kontinuerlig andra-derivata). Givet detta så kan vi nu formulera variationsformuleringen.

Variationsformulering: Finn $u \in \mathcal{V}$ sådant att:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \big(-u''(x) - f(x)\big)v(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}^0 \iff \\ &\int_0^1 -u''(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x, \quad \forall v \in \mathcal{V}^0. \end{aligned} \tag{3}$$

Observera att u och v inte ligger i samma rum. Nästa steg är att förenkla delen $\int -u''(x)v(x)$ med partiell-integration för att få bort andra derivatan:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 -u''(x)v(x)\mathrm{d}x \overset{\text{P.I}}{=} \big[-u'(x)v(x)\big]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x = \\ &-\underbrace{u'(1)}_{=\beta}v(1) + u'(0)\underbrace{v(0)}_{=0} + \int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x = -\beta v(1) + \int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4}$$

Notera att $v(0) = 0$ på grund av hur $\mathcal{V}^0$ defineras. Givet detta kan **VF** skrivas: Finn $u \in \mathcal{V}$ sådant att

$$\begin{aligned} &\int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x - \beta v(1) = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x \quad \in \mathcal{V}^0 \iff \\ &\int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x + \beta v(1), \quad \forall v \in \mathcal{V}^0 \end{aligned} \tag{5}$$

Nästa steg är formulera FEM-approximation u_h. Då u_h ska vara styckvis linjär krävs att vi skapar en partition av x-axeln på vilken u_h är styckvis linjär. Därav definierar vi $\tau_h : x_j = j * h$ för

$j = 0, 1, \ldots, N$, där $h = 1/N$. Givet τ_h kan vi nu formulera rummen som krävs för vår FEM-formulering:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_h &= \{w : \text{w är styckvis linjär på } \tau_h \text{ och } w(0) = \alpha \ \} \\ \mathcal{V}_h^0 &= \{w : \text{w är styckvis linjär på } \tau_h \text{ och } w(0) = 0\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Observera, givet nollskilt Dirichlet-villkor krävs det, likt variationsformuleringen, att två rum defineras för FEM-formuleringen. Givet Eq. 7 blir FEM-formuleringen: Finn $u_h \in \mathcal{V}_h$ sådant att:

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v_h(x)\mathrm{d}x + \beta v_h(1), \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h^0 \tag{7}$$

För att finna u_h som löser FEM-formuleringen (Eq. 7) noterar vi att $\mathcal{V}_h = \text{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1}, \varphi_N\}$, d.v.s varje funktion i $\mathcal{V}_h$ kan skrivas som en linjär-kombination av hatt-funktionerna $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N$ (Fig. 1). Observera i Fig. 1 att φ_0 och φ_N är halva hattar då det är troligt att u_h inte är noll på ränderna (d.v.s $u_h(0) \neq 0, u_h(1) \neq 0$). Givet hatt-funktionerna gäller erhålls att u_h kan skrivas som

$$u_h = \xi_0\varphi_0 + \xi_1\varphi_1 + \ldots + \xi_N\varphi_N = \xi_0\varphi_0 + \sum_{j=1}^{N} \xi_j\varphi_j. \tag{8}$$

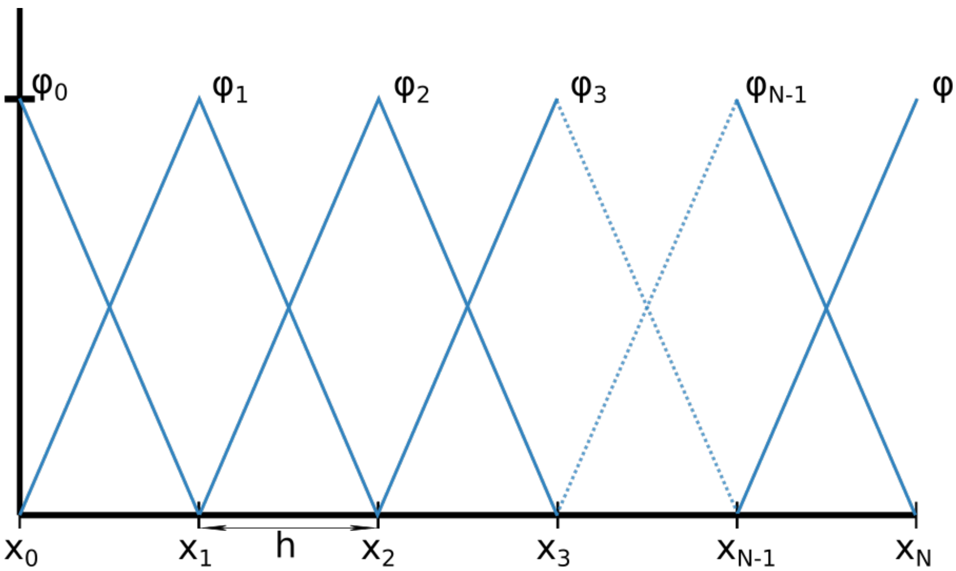

Figure 1: *Hatt-funktionerna $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1}, \varphi_N$ som utgör en bas för $\mathcal{V}_h$*

Ytterligare, för att underlätta följande uträkningar kan vi notera att $u_h(0) = \xi_0\varphi_0(0) = \xi_0$. Ty, som observeras i Fig. 1 är φ_0 den enda hatten som är nollskild när $x = 0$, samt $\varphi(0) = 1$. Ytterligare, utifrån definitionen av $\mathcal{V}_h$ (Eq. 7) vet vi att $u_h(0) = \alpha$, vilket medför att $\alpha = u_h(0) = \xi_0$. Givet detta, och Eq. 8, kan FEM-formuleringen skrivas; finn $\xi_1, \ldots, \xi_N$ sådant att

$$\begin{aligned} &\alpha \int_0^1 \varphi_0' v_h' \mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{N} \xi_j \int_0^1 \varphi_j' v_h' \mathrm{d}x = \int_0^1 f v_h \mathrm{d}x + \beta v_h(1), \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h^0 \iff \\ &\sum_{j=1}^{N} \xi_j \int_0^1 \varphi_j' v_h' \mathrm{d}x = \int_0^1 f v_h \mathrm{d}x + \beta v_h(1) - \alpha \int_0^1 \varphi_0' v_h' \mathrm{d}x, \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h^0 \end{aligned} \tag{9}$$

Sammantaget, för att lösa för $\xi_1, \dots, \xi_N$ (och därmed u_h då φ_i är kända funktioner) behöver vi N ekvationer då vi har N okända. Då Eq. 9 ska gälla för alla $v_h \in \mathcal{V}_h^0$ behöver vi bara välja N-funktioner från $\mathcal{V}_h^0$ för att erhålla N-ekvationer. För att förenkla följande uträkningar väljer vi bas-funktionerna $\varphi_1, \dots, \varphi_N$, vilket ger följande ekvationssystem:

$$\sum_{j=1}^{N} \xi_j \int_0^1 \varphi_j' \varphi_i' \mathrm{d}x = \int_0^1 f \varphi_i \mathrm{d}x + \beta \varphi_i(1) - \alpha \int_0^1 \varphi_0' \varphi_i' \mathrm{d}x, \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{10}$$

Sammantaget utgör Eq. 10 ett matris-system $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}$, där $a_{ii} = \int_0^1 \varphi_j' \varphi_i' \mathrm{d}x$ (vanlig styvhetsmatrix) och $b_i = \int_0^1 f \varphi_i \mathrm{d}x + \beta \varphi_i(1) - \alpha \int_0^1 \varphi_0' \varphi_i \mathrm{d}x$. För att förenkla lastvektorn $\mathbf{b}$ kan vi notera att

$$\beta \varphi_i(1) = \begin{cases} \beta \underbrace{\varphi_i(1)}_{=1} = \beta & i = N \\ 0, \quad i \neq N \end{cases} \tag{11}$$

ty som observerat i Fig. 1 är endast hatten φ_N nollskild i $x = 1$. Ytterligare har vi att

$$-\alpha \int_0^1 \varphi_0' \varphi_i' = \begin{cases} -\alpha \int_0^{x_1} \underbrace{\varphi_0'}_{-1/h} \underbrace{\varphi_1'}_{1/h} = \alpha/h, & i = 1 \\ 0, \quad i \neq 1 \end{cases}, \tag{12}$$

ty som observeras i Fig. 1 är φ_1 är den enda hatten av $\varphi_i, i = 1, \dots, N$ som överlappar med φ_0. Givet allt detta (då $\mathbf{A}$ är vanliga styvhetsmatrisen med halv-hatt på slutet) blir ekvationsystmet för Eq. 1 följande:

$$\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \xi_{N-1} \\ \xi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 \varphi_1 f \mathrm{d}x \\ \int_0^2 \varphi_2 f \mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_0^1 \varphi_{N-1} f \mathrm{d}x \\ \int_0^1 \varphi_N f \mathrm{d}x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha/h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \tag{13}$$

Del-uppgift A och B

I uppgiften har vi fått givet att $N = 3$ och $f(x)$. Givet detta erhålls att $u_h = \alpha \varphi_0 + \sum_{j=1}^{3} \xi_j \varphi_j$ och systemet i Eq. 14 reducerar till (för att lösa b) stoppa in $\alpha = 2$ och $\beta = 3$ i Eq. 14)

$$\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha/h \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \tag{14}$$

Vilket utifrån definitionen av vektor-matris multiplikation kan skrivas som:

$$\begin{gathered} \frac{1}{h}\left(\xi_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{\alpha}{h} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \iff \\ \frac{1}{h}\left(-\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xi_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \iff \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{15}$$