

PROJEKT (25 november 2020)

Detta projekt är inspirerat av det som Fardin Saedpanah gav i 2019.

1. INSTRUKTIONER

Det här projektet har två delar: en teoretisk del (inlämnas senast 4 december) och en praktisk del (inlämnas senast 8 januari). Endast en lösning per grupp (av ca 3 studenter) skall lämnas in i Canvas. Skriv namn och personnummer på alla gruppmedlemmar. Vid behov ges möjlighet till en komplettering som ska lämnas in senast 18/12, resp. 16/01. Resultat meddelas i Canvas.

2. PROBLEMFORMULERING

Vi ska studera materialtransport av ett salt löst i vatten i en endimensionell kanal av längd L (m). Diffusiviteten för saltet i vattnet är D (m²/s) och vattnet strömmar genom kanalen med en hastighet c (m/s). Salt tillförs genom kanalens väggar med en intensitet f (mol/ms). I ändarna av kanalen finns filter genom vilka fluxet av salt är proportionellt mot koncentrationen med proportionalitetskonstanter k_0 respektive k_L (m/s). Vid tiden $t = 0$ är koncentrationen av salt i kanalen u_0 .

Detta beskrivs matematiskt av modellen

$$(1a) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T,$$

$$(1b) \quad D \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = k_0 u(0, t) + cu(0, t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$(1c) \quad D \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -k_L u(L, t) + cu(L, t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$(1d) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L,$$

där $u(x, t)$ är koncentrationen av salt (mol/m) och T är en sluttid.

3. UPPGIFTER

3.1. Teoretisk del, inlämnas senast 4 december.

Uppgift:

Härled variationsformulering, finita elementformulering, och tidsstegningsschema (jämför Studio II) för problem (1a)-(1d).

Tips: Randvillkoren (1b) och (1c) kommer ge upphov till ännu en matris (med bara två nollskilda element) i det diskreta ekvationssystemet.

Inlämning:

Datorskrivna lösningar eller inscannade handskrivna lösningar laddas upp i Canvas i pdf-format senast 4/12.

3.2. Praktisk del, inlämnas senast 8 januari.

Uppgift:

(a) Implementera tidsstegningsschemat från ovanför teoretiska del i Matlab.

(b) Välj $L = 1$, $T = 2$, $D = 1$, $u_0(x) = 10x(1 - x)$, och

$$f(x, t) = \begin{cases} 100 \exp(-100(x - 1/4)^2), & t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Använd er kod för att studera konvektionens och randvillkorens kvalitativa inverkan på lösningens beteende. Intressanta värden att studera är till exempel olika kombinationer av $c = 0, 1, 10, -10$, $k_0 = 0, 1, 10^5$, och $k_L = 0, 1, 10^5$. Betrakta åtminstone fem olika fall.

Skapa animeringar av resultaten med hjälp av nedanstående kod. Resonera kring den fysikaliska rimligheten av era resultat.

Inlämning:

Animeringar, pdf-dokument med resonemang och analys av resultaten, samt Matlabkod laddas upp i Canvas senast 08/01, lämpligtvis i en zip-fil.

Matlabkod för animering:

```
videoname = % Ange namn som en textsträng
vidobj = VideoWriter(videoname);
vidobj.FrameRate = 10;
open(vidobj)
for % Loop över tidsstegen
    % Plotta resultat vid tidssteget
    writeVideo(vidobj, getframe(gcf))
end
close(vidobj)
```