

3.2. a)

För Euler bak har vi

$$\frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} = \lambda u(t+\Delta t) \Rightarrow u(t+\Delta t) = (1 - \lambda \Delta t)^{-1} u(t)$$

$$\Rightarrow u(\Delta t) = \underbrace{(1 - \lambda \Delta t)^{-1}}_{\text{propagator } P(\Delta t)} u_0$$

Taylor runt 0

$$P(\Delta t) = (1 - \lambda \Delta t)^{-1} = 1 + \lambda \Delta t + 2\lambda^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} + \dots$$

$$\left. \begin{aligned} P'(\Delta t) &= \lambda (1 - \lambda \Delta t)^{-2} \\ P''(\Delta t) &= 2\lambda^2 (1 - \lambda \Delta t)^{-3} \end{aligned} \right\} \text{vi sätter in i Taylorutvecklingen}$$

Men $u(t) = e^{\lambda t} u_0$, så $e^{\lambda \Delta t} - P(\Delta t) = -\frac{1}{2} (\Delta t)^2 + O((\Delta t)^3)$

↙
Felet är av ordning $(\Delta t)^2$

b)

För Crank-Nicolson har vi

$$\frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} = \frac{\lambda}{2} (u(t) + u(t+\Delta t))$$

Testa själva:

1. Lös ut $u(t+\Delta t) = P(\Delta t) u(t)$
2. Taylorutveckla $P(\Delta t)$ runt 0
3. Jämför med analytiska prop.
 $e^{\lambda \Delta t} (e^{\lambda \Delta t} - P(\Delta t))$
4. Ordningen på trunkeringsfelet
blir den lägsta potensen av Δt