Övning 6

Max Blom

November 29, 2020

8.5a

Uppgift: Beräkna lösningen till

$$\dot{u}(t) + a(t)u(t) = t^2, \quad 0 < t < T, \ u(0) = 1$$

där $a(t) = 4$.

8.5a

Differentialekvationen har homogen lösning $u_h(t) = Ce^{-4t}$. Vi får ut partikulärlösning genom att sätta in

$$u_p(t) = at^2 + bt + c$$

och får ut

$$2at + b + 4at^2 + bt + c = t^2 \tag{1}$$

som ger $a = 1/4$, $b = -1/2$, $c = 1/2$.

Svaret blir då

$$u(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-4t}\right). \tag{2}$$

8.5a

Vi har att

$$u(t) = u_0 e^{A(t)} + \int_0^t e^{-(A(t)-A(s))} f(s) \mathrm{d}s$$

där $A(t) = \int_0^t a(s) \mathrm{d}s$ och $f(t)$ är högerledet i differentialekvationen. Då $a(t) = 4$ får vi $A(t) = 4t$. Stoppar vi in allt får vi

$$u(t) = u_0 e^{-4t} + \int_0^t e^{4s-4t} s^2 \mathrm{d}s.$$

9.7

Uppgift: Betrakta ekvationen

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \epsilon u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1. \end{cases} \tag{3}$$

Visa att för det stationära problemet ($u_t = 0$) gäller uppskattningen

$$\|u_x\| \leq \frac{1}{\epsilon} \|f\| . \tag{4}$$

9.7

Lös genom att multiplicera stationära ekavtionen med u och integrera, så får vi

$$-\epsilon \int_0^1 u_{xx} u \mathrm{d}x = \int_0^1 f u \mathrm{d}x.$$

Använd nu partiell integration och få ut

$$\epsilon \int_0^1 u_x u_x \mathrm{d}x = \int_0^1 f u \mathrm{d}x.$$

9.7

Detta är ju samma som att skriva

$$\epsilon < u_x, u_x > = < f, u > .$$

Då $< w, w > = \|w\|^2$ för en funktion w så skriver vi om och använd Cauchy-Schwarz

$$\epsilon \|u_x\|^2 = < f, u > \leq \|f\| \|u\| .$$

Vi kan göra om $\|u\|$ till en derivata med hjälp av Poincarés olikhet i 1D

$$\|u\| \leq L \|u_x\| .$$

9.7

Vi får då

$$\|u_x\|^2 \leq \frac{1}{\epsilon} \|f\| \|u\| \leq \frac{1}{\epsilon} \|f\| \|u_x\|$$

som ger

$$\|u_x\| \leq \frac{1}{\epsilon} \|f\| .$$